

ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR ALJABAR MELALUI DESAIN KESEMPATAN BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA

Nasrullah¹, Khadijah², Ahyani Mirah Liani³, Mar Athul Wazithah T.⁴

Program Studi Pendidikan Matematika^{1,2,3,4}

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam^{1,2,3,4}

Universitas Negeri Makassar^{1,2,3,4}

nasrullah@unm.ac.id¹, khadijah@unm.ac.id², ahyani.mirah.liani@unm.ac.id³,
mar.athul.wazithah@unm.ac.id⁴

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika melalui desain kesempatan belajar pada mata kuliah Aljabar Linear Elementer. Pendekatan penelitian yang digunakan adalah kualitatif deskriptif dengan subjek tiga orang mahasiswa yang dipilih secara purposif. Data dikumpulkan melalui analisis hasil tugas dan wawancara semi-terstruktur, kemudian dianalisis menggunakan indikator kemampuan berpikir aljabar menurut Kieran (2004), yaitu generalisasi aritmetika, representasi simbolik, dan penalaran struktur matematis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa subjek pertama dan kedua memiliki kemampuan berpikir aljabar pada kategori sedang, sedangkan subjek ketiga menunjukkan kemampuan tinggi dengan eksplorasi konseptual yang lebih mendalam. Secara umum, mahasiswa lebih menguasai aspek generalisasi aritmetika dan representasi simbolik dibanding penalaran struktur matematis yang masih menjadi tantangan utama. Implementasi desain pembelajaran berbasis kesempatan belajar terbukti memberikan kontribusi positif dalam mengembangkan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa melalui penciptaan lintasan konseptual yang bermakna, fleksibilitas pembelajaran, integrasi teknologi spreadsheet, serta pengembangan refleksi dan metakognisi. Temuan ini menegaskan pentingnya strategi pembelajaran yang responsif dan adaptif untuk mengoptimalkan perkembangan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa di perguruan tinggi.

Kata Kunci: kemampuan berpikir aljabar, desain kesempatan belajar, aljabar linear

A. Pendahuluan

Aljabar memiliki peran yang sangat penting dalam pendidikan matematika karena berfungsi sebagai bahasa simbolik dan sarana berpikir abstrak. Kieran (2004) menjelaskan bahwa berpikir aljabar bukan sekadar manipulasi simbol, tetapi juga melibatkan kemampuan generalisasi, representasi, dan penalaran terhadap struktur matematis. Sejalan dengan itu, Kaput (2008) menyebutkan bahwa aljabar

merupakan bahasa sekaligus alat untuk mengekspresikan generalisasi, struktur, dan hubungan dalam matematika.

Secara lebih spesifik, Kieran (2004) menegaskan bahwa berpikir aljabar meliputi tiga aspek utama, yaitu (1) generalisasi aritmetika, yakni kemampuan menemukan pola dan sifat operasi hitung lalu menyatakannya secara umum; (2) pemahaman terhadap representasi simbolik, yaitu kemampuan menggunakan dan menafsirkan simbol untuk menggambarkan suatu permasalahan; dan (3) penalaran tentang struktur matematis, yaitu kemampuan melihat, memahami, dan menganalisis struktur dalam ekspresi atau persamaan. Berhubungan dengan penalaran matematis, kemampuan ini sangat penting dalam menyelesaikan masalah. Seseorang yang memiliki penalaran matematis yang rendah, maka ia akan kesulitan dalam menyelesaikan masalah (Hamda, Waliyullah, Nasrullah; 2025). Tiga aspek ini dapat dijadikan indikator utama untuk menilai kemampuan berpikir aljabar mahasiswa.

Kesulitan dalam kemampuan berpikir aljabar terbukti berdampak pada lemahnya penguasaan materi lanjutan. Carraher dan Schliemann (2007) mengungkapkan bahwa kesulitan mahasiswa dalam aljabar sering kali melemahkan pemahaman mereka terhadap matematika lanjut, seperti kalkulus dan struktur aljabar. Hal ini diperkuat oleh Stacey dan MacGregor (1997) yang menjelaskan bahwa banyak mahasiswa membawa miskonsepsi tentang simbolisme ke dalam pembelajaran aljabar sehingga membatasi kemampuan mereka untuk melakukan generalisasi.

Dalam konteks pendidikan modern, National Council of Teachers of Mathematics (2000) menyatakan bahwa aljabar sebaiknya menjadi bagian yang terintegrasi dalam semua jenjang pendidikan, karena mendukung penalaran, pemecahan masalah, dan komunikasi matematis. Artinya, kemampuan berpikir aljabar juga sejalan dengan tuntutan keterampilan abad ke-21 yang menekankan pemikiran kritis, kreatif, serta penyelesaian masalah yang sistematis. Sejalan dengan hal tersebut, Nasrullah, Khadijah, dan Liani (2024) menegaskan bahwa mahasiswa yang memiliki kemampuan berpikir aljabar yang baik lebih mampu mencapai tingkat analisis mendalam dalam pembelajaran aljabar linear lanjut. Hal ini menunjukkan bahwa kemampuan berpikir aljabar bukan hanya kebutuhan

akademis, tetapi juga menjadi penentu keberhasilan mahasiswa dalam menguasai konsep-konsep matematika yang lebih kompleks.

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa masih menghadapi hambatan dalam mempelajari aljabar. Stacey dan MacGregor (1997) menyatakan bahwa “mahasiswa membawa banyak miskonsepsi tentang simbolisme ke dalam pembelajaran aljabar sehingga membatasi kemampuan mereka untuk melakukan generalisasi”. Radford (2010) juga menegaskan bahwa “kesulitan dalam berpikir aljabar terjadi karena mahasiswa tidak mampu menghubungkan representasi matematis yang berbeda”. Kemampuan berpikir aljabar mahasiswa sering terhambat karena pembelajaran masih dominan berorientasi pada prosedur simbolik. Kilpatrick, Swafford, dan Findell (2001) menekankan bahwa penguasaan aljabar seharusnya mencakup pemahaman konseptual dan penalaran, bukan sekadar keterampilan prosedural. Simon (1995) menegaskan bahwa rancangan pengajaran harus bersifat fleksibel agar dapat menyesuaikan diri dengan perkembangan pemahaman siswa selama proses pembelajaran. Dengan pendekatan ini, pengajar dapat mengatur interaktivitas kelas melalui pertanyaan pemicu, diskusi kelompok, maupun pemberian tugas yang sesuai dengan tahap berpikir siswa.

Kajian terbaru di Indonesia juga memperkuat relevansi ini. Risnanosanti, Prasetyo, dan Syofiana (2023) menunjukkan bahwa LPH efektif memandu pengembangan penalaran matematis mahasiswa pada materi statistika. Penelitian Maria, Panggabean, dan Harahap (2023) pada bilangan bulat juga menegaskan pentingnya lintasan konseptual dalam memandu siswa membangun pemahaman berkelanjutan. Demikian pula, Andini (2024) merancang desain didaktis untuk mengantisipasi kesulitan berpikir aljabar siswa sekolah dasar melalui lintasan belajar yang sistematis.

Berdasarkan uraian tersebut, analisis kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika menjadi penting untuk dilakukan agar diperoleh gambaran menyeluruh mengenai sejauh mana mahasiswa mampu menalar, menggeneralisasi, dan memahami konsep-konsep aljabar secara mendalam. Analisis ini juga memperhatikan perlakuan yang diberikan melalui rancangan pembelajaran yang telah diimplementasikan, sehingga hasil penelitian tidak hanya mencerminkan kondisi kemampuan mahasiswa secara alami, tetapi juga

menunjukkan bagaimana pembelajaran dapat berkontribusi dalam membentuk kemampuan tersebut. Dengan demikian, penelitian ini menempatkan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa sebagai fokus utama kajian, sekaligus menghubungkannya dengan konteks pembelajaran yang dijalani.

B. Metode penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan fokus pada analisis kemampuan berpikir aljabar mahasiswa. Pendekatan ini dipilih karena memungkinkan peneliti menggali secara mendalam proses berpikir mahasiswa melalui hasil tugas dan wawancara, sekaligus menghubungkannya dengan konteks pembelajaran berbasis desain kesempatan belajar.

Subjek penelitian adalah mahasiswa program studi pendidikan matematika yang mengikuti perkuliahan aljabar linear pada semester genap tahun akademik 2024/2025. Pemilihan subjek dilakukan secara purposif berdasarkan keterlibatan dalam proses pembelajaran, hasil penugasan, serta kesediaan untuk diwawancarai.

Data utama didapatkan dari hasil tugas mahasiswa pada materi ruang vektor yang dirancang untuk mengeksplorasi kemampuan berpikir aljabar. Kemudian Data transkrip wawancara mendalam mengenai pengalaman mahasiswa dalam pembelajaran.

Teknik Pengumpulan Data melalui Dokumentasi hasil penugasan mahasiswa dan Wawancara semi-terstruktur untuk menggali lebih jauh proses berpikir mahasiswa dan pengalaman belajar mereka. Instrumen yang digunakan meliputi pedoman analisis tugas berdasarkan indikator berpikir aljabar menurut Kieran (2004) yaitu Generalisasi aritmetika, representasi simbolik, dan penalaran struktur matematis. Untuk pedoman wawancara memuat pertanyaan terkait strategi penyelesaian, interpretasi simbol, serta pengalaman dalam pembelajaran.

Rubrik ini digunakan untuk mengklasifikasikan tingkat kemampuan berpikir aljabar mahasiswa pada masing-masing indikator dicantumkan dalam tabel berikut.

Tabel. 1 Rubrik tingkat kemampuan berpikir aljabar mahasiswa

Indikator	Tinggi	Sedang	Rendah
Generalisasi Aritmetika	Mampu menemukan semua nilai skalar dari persamaan dengan tepat, konsisten menyatakan bentuk umum, serta dapat menggeneralisasi pada berbagai situasi.	Dapat mengidentifikasi pola dan menemukan nilai skalar yang benar, namun belum konsisten dalam menyatakan bentuk umum.	Kesulitan menemukan pola, tidak mampu menyatakan bentuk umum, atau hanya mengikuti prosedur tanpa pemahaman.
Representasi Simbolik	Menggunakan simbol vektor dengan benar, mampu mengoperasikan (penjumlahan, pengurangan, perkalian) secara tepat dan menyederhanakan hasil sampai bentuk paling sederhana.	Menuliskan simbol dan operasi vektor dengan cukup baik, namun kadang terdapat kesalahan penafsiran atau proses.	Sering keliru menuliskan simbol, tidak memahami makna, dan gagal menghubungkannya dengan konsep.
Penalaran Struktur Matematis	Mampu mengenali, memahami, dan menjelaskan keterkaitan struktur dalam ekspresi atau persamaan dengan benar, bahkan sampai mendapatkan besar sudut dan menyelesaikan soal hingga akhir.	Memahami struktur dan formula yang digunakan, tetapi masih melakukan kesalahan dalam kesimpulan atau proses pengerjaan.	Tidak mampu mengenali struktur, berpikir terbatas pada prosedur mekanis.

Analisis data dilakukan melalui tahapan yaitu :

1. Reduksi data: mengelompokkan jawaban mahasiswa sesuai indikator
2. Penyajian data: menarasikan hasil analisis tugas dan wawancara, serta mengaitkannya dengan konteks pembelajaran berbasis desain kesempatan belajar.
3. Penarikan kesimpulan: menyusun interpretasi tentang pola berpikir aljabar mahasiswa, keterhubungan dengan strategi pembelajaran, serta tingkat kemampuan mereka secara menyeluruh.

C. Hasil Dan Pembahasan

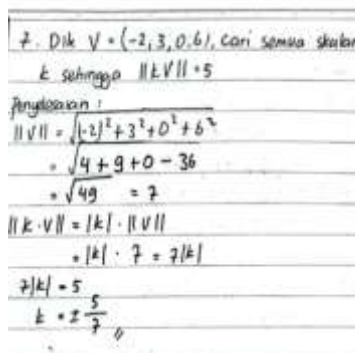
Penelitian analisis kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika dilaksanakan pada semester berjalan dalam mata kuliah aljabar linear elementer tahun ajaran 2024/2025. Untuk data kualitatif, subjek penelitian terdiri dari 3 orang mahasiswa yang menunjukkan memiliki kemampuan berpikir aljabar, Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis tingkat kemampuan berpikir aljabar dalam pembelajaran aljabar linear elementer di perguruan tinggi, dengan kualitatif deskriptif. Terdapat 3 orang mahasiswa sebagai subjek penelitian. Selain itu, ketiga subjek ini juga diwawancarai untuk mengidentifikasi hasil penerapan strategi pembelajaran yang telah didesain oleh peneliti.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka didapatkan hasil sebagai berikut :

Subjek 1

Indikator generalisasi

Soal untuk mengukur indikator generalisasi yaitu mencari semua nilai skalar yang memenuhi suatu persamaan. Pada hasil pekerjaan subjek 1 dalam gambar 1, terlihat mahasiswa mengeneralisasi dengan menemukan semua nilai skalar yang memenuhi operasi tersebut dengan tepat.


$$\begin{aligned} 7. \text{ Dik } V &= (-2, 3, 0, 6), \text{ Cari semua skalar } k \text{ sehingga } \|kV\| = 5 \\ \text{Penyelesaian:} \\ \|V\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{4 + 9 + 0 + 36} \\ &= \sqrt{49} = 7 \\ \|k \cdot V\| &= |k| \cdot \|V\| \\ &= |k| \cdot 7 = 7|k| \\ 7|k| &= 5 \\ k &= \pm \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Gambar 1. Hasil pekerjaan Subjek 1

Indikator representasi simbolik

Soal untuk mengukur indikator representasi simbolik yaitu dengan operasi hitung pada vektor. Subjek 1 mampu menggunakan simbol-simbol dalam vektor dengan tepat yaitu cara perkalian, penjumlahan, dan pengurangan. Subjek 1 mampu mengelompokkan anggota dalam vektor yang akan dioperasikan.

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Ditanya: tentukan jarak antara vektor u dan w.
 Jawab:

$$u - w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|u - w| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$u \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot w}{|u| |w|} = \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{42}} \right)$$

Gambar 2. Hasil pekerjaan subjek 1

Indikator penalaran struktur matematis

Soal untuk mengukur penalaran struktur matematis mahasiswa yaitu dengan mencari jarak antara vektor u dan vektor v , serta kosinus dan mengidentifikasi sudut yang terbentuk. Hasil pekerjaan subjek 1 menunjukkan bahwa mahasiswa mampu mengenali maksud soal dan memahami formula yang digunakan untuk menyelesaikan. Namun, terdapat kesalahan pada bagian akhir.

11. Cari jarak antara vektor u dan v .
 Tentukan sudut antara vektor u dan v .
 Diketahui: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Jawab:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|u - v| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$u \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

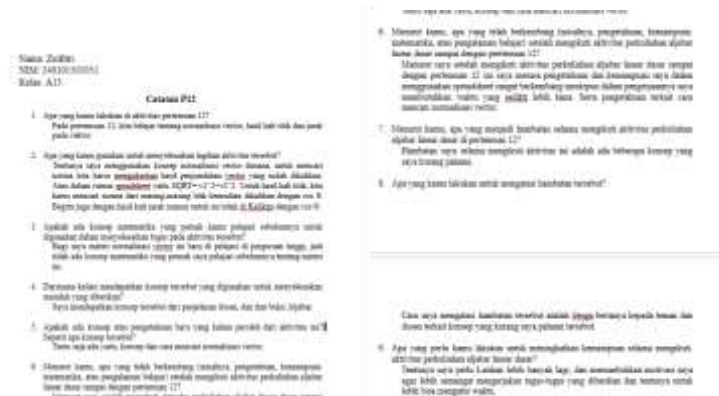
$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{42}} \right)$$

Gambar 3. Hasil pekerjaan subjek 1

Hasil wawancara

Berdasarkan hasil wawancara dengan subjek 1, menunjukkan bahwa subjek mengalami pembelajaran yang bermakna dalam mata kuliah aljabar linear elementer, khususnya dalam topik normalisasi vektor. Terdapat indikasi perkembangan kemampuan berpikir aljabar yang positif melalui kemampuan memahami dan menjelaskan konsep matematis abstrak, integrasi konsep matematis

dengan tools spreadsheet, kesadaran terhadap proses pembelajaran dan hambatan yang dihadapi, inisiatif mencari bantuan dan mengembangkan diri.



Gambar 4. Hasil wawancara subjek 1

Subjek 2

Indikator generalisasi

Pertanyaan ini bertujuan mengukur indikator generalisasi, yakni kemampuan menemukan semua solusi skalar dari persamaan yang diberikan. Dari jawaban subjek 2 yang tertera dalam gambar 5, dapat diamati bahwa mahasiswa berhasil menggeneralisasi dengan mengidentifikasi secara tepat semua nilai skalar yang memenuhi operasi yang dimaksud.

$$7. \quad v = (2, 3, 0, 6), \quad ||kv|| = 5$$

$$||kv|| = |k| \cdot ||v||$$

$$||v|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$||kv|| = |k| \cdot ||v|| = 5$$

$$|k| \cdot 7 = 5$$

$$|k| = \frac{5}{7}$$

Gambar 5. Hasil pekerjaan subjek 2

Indikator representasi simbolik

Hasil analisis menunjukkan bahwa Subjek 2 memiliki kemampuan representasi simbolik yang baik dalam operasi hitung vektor. Subjek mampu menggunakan simbol-simbol vektor dengan tepat dan menerapkan operasi perkalian, penjumlahan, serta pengurangan secara benar. Selain itu, Subjek 2 juga menunjukkan kemampuan untuk mengelompokkan anggota-anggota dalam vektor yang akan dioperasikan dengan sistematis. Hal ini mengindikasikan bahwa subjek memahami konsep dasar operasi vektor dan mampu merepresentasikannya dalam

bentuk simbolik dengan akurat. Selain itu, subjek 2 menghasilkan jawaban sampai nilai yang paling sederhana.

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. At the top, it lists three vectors: $u = (-2, 1, 3)$, $v = (1, -5, 4)$, and $w = (6, 0, 1)$. Below this, it calculates the dot product $u \cdot v = -2(1) + 1(-5) + 3(4) = -2 - 5 + 12 = 5$. Then it calculates the magnitudes $|u| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ and $|v| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{42}$. Finally, it calculates the cosine of the angle between them: $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{5}{\sqrt{14} \sqrt{42}} = \frac{5}{\sqrt{588}} = \frac{5}{14\sqrt{3}}$.

Gambar 6. Hasil pekerjaan subjek 2

Indikator penalaran struktur matematis

Soal untuk mengukur penalaran struktur matematis mahasiswa yaitu dengan mencari jarak antara vektor u dan vektor v , serta kosinus serta mengidentifikasi sudut yang terbentuk. Hasil pekerjaan subjek 1 menunjukkan bahwa mahasiswa mampu mengenali maksud soal dan memahami formula yang digunakan untuk menyelesaikan. Sama halnya dengan subjek 1, terdapat kesalahan pada proses pengerjaan namun kesimpulan akhirnya sudah tepat.

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. It starts with the same vectors as Gambar 6: $u = (-2, 1, 3)$, $v = (1, -5, 4)$, and $w = (6, 0, 1)$. It then calculates the dot product $u \cdot v = -2(1) + 1(-5) + 3(4) = 5$. Next, it calculates the magnitudes $|u| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ and $|v| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{42}$. Finally, it calculates the cosine of the angle: $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{14} \sqrt{42}} = \frac{5}{\sqrt{588}} = \frac{5}{14\sqrt{3}}$.

Gambar 7. Hasil pekerjaan subjek 2

Hasil wawancara

Berdasarkan hasil wawancara dengan subjek 2, menunjukkan bahwa subjek mengalami pembelajaran yang bermakna dalam mata kuliah aljabar linear dasar, khususnya dalam topik norma hasil kali titik dan jarak vektor. Terdapat indikasi perkembangan kemampuan berpikir aljabar yang positif melalui kemampuan memahami dan menerapkan konsep matematis yang telah dipelajari, kesadaran terhadap konsep-konsep baru yang belum dikuasai, kemampuan mengidentifikasi

pengetahuan baru yang diperoleh dari pembelajaran, kesadaran akan perkembangan kemampuan yang terjadi selama proses pembelajaran, dan inisiatif mencari sumber belajar tambahan serta komitmen untuk berpartisipasi lebih aktif dalam pembelajaran.

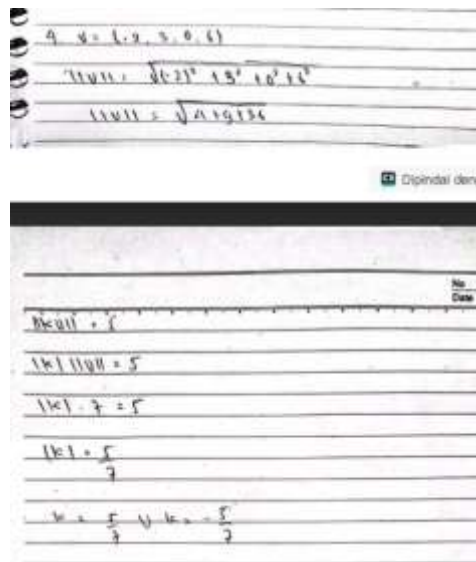


Gambar 8. Hasil wawancara subjek 2

Subjek 3

Indikator generalisasi

Soal untuk mengukur indikator generalisasi yaitu mencari semua nilai skalar yang memenuhi suatu persamaan. Pada hasil pekerjaan subjek 3 dalam gambar 9, terlihat mahasiswa mengeneralisasi dengan menemukan semua nilai skalar yang memenuhi operasi tersebut dengan tepat.



Gambar 9. Hasil pekerjaan subjek 3

Indikator representasi simbolik

Hasil analisis menunjukkan bahwa Subjek 3 memiliki kemampuan representasi simbolik yang baik dalam operasi hitung vektor. Subjek mampu menggunakan simbol vektor dengan tepat dan menerapkan operasi perkalian, penjumlahan, serta pengurangan secara tepat. Hal ini menandakan bahwa subjek memahami konsep dasar operasi vektor dan mampu merepresentasikannya dalam bentuk simbolik dengan akurat

Handwritten mathematical work for Gambar 10. The work shows the calculation of the magnitude of a vector $3u - 2v$. It starts with defining vectors $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Then it calculates $3u - 2v = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 18 \end{pmatrix}$. Finally, it calculates the magnitude $|3u - 2v| = \sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + 18^2} = \sqrt{349} \approx 18.68$.

Gambar 10. Hasil pekerjaan subjek 3

Indikator penalaran struktur matematis

Soal untuk mengukur penalaran struktur matematis mahasiswa yaitu dengan mencari jarak antara vektor u dan vektor v , serta kosinus serta mengidentifikasi sudut yang terbentuk. Hasil pekerjaan subjek 3 menunjukkan bahwa mahasiswa mampu mengenali maksud soal dan memahami formula yang digunakan untuk menyelesaikan. Subjek menyelesaikan soal dengan tepat sampai kesimpulan akhir bahkan sampai mendapatkan besar sudutnya.

Handwritten mathematical work for Gambar 11. The work shows the calculation of the distance between two vectors u and v . It starts with defining vectors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Then it calculates the magnitude of $u - v$ as $|u - v| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$. It also calculates the dot product $u \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$ and the magnitudes $|u| = \sqrt{14}$ and $|v| = \sqrt{6}$. Finally, it calculates the cosine of the angle θ as $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{8}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$ and the angle $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{21}} \right) \approx 60.26^\circ$.

Gambar 11. Hasil pekerjaan subjek 3

Hasil Wawancara

Berdasarkan hasil wawancara dengan subjek, menunjukkan bahwa subjek mengalami pembelajaran yang bermakna dalam aktivitas pertemuan 12, khususnya dalam topik tugas yang berhubungan dengan norma vektor, hasil kali titik, dan jarak antar dua titik. Terdapat indikasi perkembangan kemampuan berpikir matematika yang positif melalui kemampuan mengidentifikasi tugas-tugas yang telah dikerjakan sebelumnya dan menerapkan konsep matematis dalam menyelesaikan masalah yang diberikan, kesadaran terhadap konsep-konsep yang pernah dipelajari seperti cara mencari jarak antar dua titik, kemampuan menggunakan spreadsheet sebagai alat bantu dalam menyelesaikan masalah perhitungan, kesadaran akan pentingnya pengetahuan mengenai norma vektor dan hasil kali titik dalam mengikuti aktivitas perkuliahan aljabar linear dasar, dan upaya mencari jarak yang mendukung di berbagai tempat serta komitmen untuk memahami materi dengan lebih baik meskipun agak sulit.

1. Apa yang kamu lakukan di aktivitas pertemuan 12?
→ Saya mengerjakan tugas yang berhubungan dengan norma vektor, hasil kali titik, dan jarak antar dua titik.
2. Apa yang kamu gunakan untuk menyelesaikan tugas aktivitas tersebut?
→ Spreadsheet dan buku tulis.
3. Apakah ada konsep matematika yang pernah kamu pelajari sebelumnya untuk digunakan dalam menyelesaikan tugas pada aktivitas tersebut?
→ Ada, saya pernah mempelajari cara mencari jarak antar dua titik.
4. Bagaimana kalian mendapatkan konsep tersebut yang digunakan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan?
→ Di SMA, dan di buku perkuliahan.
5. Apakah ada konsep atau pengetahuan baru yang kalian peroleh dari aktivitas ini? Seperti apa konsep tersebut?
→ Ada, saya mendapatkan pengetahuan baru mengenai norma vektor dan hasil kali titik.
6. Menurut kamu, apa yang telah berkembang (misalnya, pengetahuan, kemampuan matematika, atau pengalaman belajar) setelah mengikuti aktivitas perkuliahan aljabar linear dasar sampai dengan pertemuan 12?
→ Pengetahuan mengenai vektor terutama pada norma vektor.
7. Menurut kamu, apa yang menjadi hambatan selama mengikuti aktivitas perkuliahan aljabar linear dasar di pertemuan 12?
→ Dikawatirkan pengerjaan saya juga mungkin spreadsheet, jadi jaringan menjadi hambatan dan terkadang teman yang diload. Selain itu, ketidakpahaman mengenai materi juga membuat saya kesulitan.
8. Apa yang kamu lakukan untuk mengatasi hambatan tersebut?
→ Saya mencoba untuk mencari jaringan yang mendukung di berbagai tempat. Selain itu saya juga mencoba memahami materi dengan lebih baik meskipun agak sulit.
9. Apa yang perlu kamu lakukan untuk meningkatkan kemampuan selama mengikuti aktivitas perkuliahan aljabar linear dasar?

Gambar 12. Hasil wawancara subjek 3

Analisis Kemampuan Berpikir Aljabar Mahasiswa

Berdasarkan analisis mendalam terhadap ketiga subjek penelitian, diperoleh gambaran komprehensif mengenai kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika dalam konteks pembelajaran aljabar linear dasar. Menggunakan rubrik

penilaian berdasarkan tiga indikator Kieran (2004), setiap subjek menunjukkan karakteristik yang berbeda.

Subjek 1 memperlihatkan kemampuan generalisasi yang kuat dengan mampu menemukan semua nilai skalar yang memenuhi persamaan dengan tepat. Dalam aspek representasi simbolik, subjek menguasai penggunaan simbol-simbol vektor dan operasi dasar dengan baik. Namun, pada indikator penalaran struktur matematis, meskipun subjek dapat mengenali maksud soal dan memahami formula yang digunakan, terdapat kelemahan dalam penarikan kesimpulan akhir. Berdasarkan rubrik penilaian, Subjek 1 dikategorikan memiliki kemampuan berpikir aljabar pada tingkat sedang.

Subjek 2 menunjukkan kemampuan yang lebih konsisten di ketiga indikator. Dalam generalisasi, subjek berhasil mengidentifikasi semua nilai skalar dengan tepat. Pada representasi simbolik, subjek tidak hanya menggunakan simbol dengan benar tetapi juga mampu menyederhanakan hasil hingga bentuk paling sederhana. Dalam penalaran struktur matematis, subjek menyelesaikan soal dengan tepat namun terdapat kesalahan pada bagian proses pengerjaan. Konsistensi penguasaan di ketiga indikator menempatkan Subjek 2 pada kategori kemampuan berpikir aljabar sedang.

Subjek 3 memperlihatkan kemampuan yang sangat baik di semua indikator. Selain menguasai generalisasi dan representasi simbolik dengan baik, subjek ini menunjukkan keunggulan dalam penalaran struktur matematis dengan menyelesaikan soal hingga mendapatkan besar sudut. Kemampuan subjek untuk melakukan analisis lebih jauh dari yang diminta soal mengindikasikan tingkat berpikir aljabar yang tinggi dengan kecenderungan eksplorasi konseptual yang mendalam.

Kemampuan generalisasi yang cukup baik pada ketiga subjek mendukung temuan Pitta-Pantazi et al. (2025) bahwa generalisasi merupakan inti berpikir aljabar dan sangat terkait dengan kemampuan memahami struktur. Hal ini menjelaskan mengapa subjek 3, yang unggul dalam generalisasi, juga lebih kuat dalam penalaran struktur. Sebaliknya, keterbatasan subjek 1 dan 2 dalam menyatakan bentuk umum konsisten dengan penelitian Torres et al. (2024) yang menunjukkan bahwa banyak siswa masih terjebak pada pola konkret sebelum mencapai generalisasi fungsional.

Pada aspek representasi simbolik, hasil penelitian ini sejalan dengan Kusuma et al. (2024) yang menegaskan adanya variasi signifikan antar mahasiswa dalam menghubungkan simbol dengan konsep. Subjek 3 mampu menuliskan simbol dengan benar dan menyederhanakan hasil hingga bentuk paling sederhana, sementara subjek 1 dan 2 masih kurang konsisten. Kesulitan ini serupa dengan temuan Musyarofah et al. (2025) yang menemukan bahwa siswa sering mengalami miskonsepsi dalam penggunaan variabel dan tanda relasi ketika menerjemahkan soal cerita ke model matematis.

Sementara itu, penalaran struktur matematis menjadi tantangan terbesar bagi mahasiswa dengan kategori sedang. Subjek 1 dan 2 memahami formula tetapi tidak selalu tepat dalam menyelesaikan dan menarik kesimpulan. Kondisi ini mendukung penelitian Carraher & Schliemann (2007) yang menegaskan bahwa lemahnya penalaran struktur dapat menghambat penguasaan matematika lanjut. Sebaliknya, subjek 3 menunjukkan kecenderungan analisis yang lebih mendalam, selaras dengan hasil penelitian Nasrullah, Khadijah, & Liani (2024) yang menekankan pentingnya kemampuan berpikir aljabar dalam keberhasilan mempelajari aljabar linear tingkat lanjut.

Secara umum, mahasiswa menunjukkan kemampuan yang relatif baik dalam generalisasi aritmetika dan representasi simbolik, namun penalaran struktur matematis menjadi aspek yang paling menantang bagi mahasiswa dengan kemampuan sedang. Hal ini sejalan dengan temuan Stacey dan MacGregor (1997) yang menyatakan bahwa mahasiswa sering membawa miskonsepsi tentang simbolisme yang membatasi kemampuan generalisasi mereka.

Pengaruh Desain Pembelajaran Berbasis Kesempatan Belajar

Implementasi desain pembelajaran berbasis kesempatan belajar memberikan pengaruh signifikan terhadap perkembangan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa, yang terlihat dari beberapa aspek:

1. Pembentukan Lintasan Konseptual yang Bermakna

Desain pembelajaran yang diterapkan berhasil menciptakan lintasan konseptual yang menghubungkan konsep abstrak aljabar linear dengan aplikasi konkret. Sejalan dengan temuan Maria, Panggabean, dan Harahap (2023), lintasan konseptual yang sistematis membantu mahasiswa membangun pemahaman

berkelanjutan. Hal ini tercermin dari kemampuan ketiga subjek dalam menghubungkan konsep vektor, norma, hasil kali titik, dan jarak dalam konteks yang terintegrasi.

2. Fleksibilitas Pembelajaran yang Responsif

Penerapan prinsip Simon (1995) tentang pembelajaran fleksibel yang dapat menyesuaikan dengan perkembangan pemahaman siswa terlihat efektif. Desain pembelajaran memberikan ruang bagi mahasiswa untuk mengeksplorasi konsep dalam berbagai representasi (simbolik, numerik, dan geometris), yang mendukung pengembangan kemampuan representasi simbolik pada ketiga subjek.

3. Integrasi Teknologi yang Mendukung Pemahaman Konseptual

Penggunaan spreadsheet sebagai alat bantu, yang muncul dalam hasil wawancara ketiga subjek, menunjukkan bahwa desain pembelajaran berhasil mengintegrasikan teknologi tanpa mengurangi fokus pada pemahaman konseptual. Hal ini sejalan dengan prinsip NCTM (2000) tentang penggunaan teknologi untuk memperkuat pemahaman matematika.

4. Pengembangan Refleksi dan Metakognisi

Analisis transkrip wawancara mengungkapkan bahwa semua subjek melaporkan pengalaman pembelajaran yang bermakna dan menunjukkan kesadaran reflektif terhadap proses pembelajaran. Subjek 1 mengidentifikasi hambatan dan berinisiatif mencari bantuan, Subjek 2 menunjukkan kesadaran terhadap konsep baru dan mencari sumber belajar tambahan, sedangkan Subjek 3 mampu mengintegrasikan pengetahuan sebelumnya dengan konteks baru.

Temuan ini memperkuat argumen Nasrullah, Khadijah, dan Liani (2024) yang menegaskan bahwa mahasiswa dengan kemampuan berpikir aljabar yang baik lebih mampu mencapai tingkat analisis mendalam dalam pembelajaran aljabar linear lanjut. Desain pembelajaran berbasis kesempatan belajar terbukti memberikan kontribusi positif terhadap perkembangan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa melalui pendekatan yang adaptif dan responsif terhadap keberagaman kemampuan.

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika melalui desain kesempatan belajar, dapat ditarik dua kesimpulan utama:

1. Penelitian mengungkapkan bahwa kemampuan berpikir aljabar mahasiswa jurusan matematika menunjukkan variasi yang signifikan berdasarkan tiga indikator Kieran (2004). Dari tiga subjek yang diteliti, ditemukan bahwa mahasiswa relatif menguasai aspek generalisasi aritmetika dan representasi simbolik dengan baik, namun menghadapi tantangan terbesar pada penalaran struktur matematis. Subjek dengan kemampuan tinggi mampu menyelesaikan ketiga indikator secara konsisten bahkan hingga eksplorasi konseptual yang mendalam, sementara subjek dengan kemampuan sedang menunjukkan kelemahan dalam penarikan kesimpulan akhir meskipun memahami konsep dasar. Temuan ini mengonfirmasi bahwa kemampuan berpikir aljabar bukan sekadar keterampilan prosedural, melainkan kemampuan kompleks yang memerlukan pendekatan pembelajaran yang tepat.
2. Implementasi desain pembelajaran berbasis kesempatan belajar terbukti memberikan pengaruh signifikan dalam mengembangkan kemampuan berpikir aljabar mahasiswa. Pendekatan ini berhasil menciptakan lintasan konseptual yang bermakna dengan menghubungkan konsep abstrak aljabar linear dengan aplikasi konkret, memberikan fleksibilitas pembelajaran yang responsif terhadap keberagaman kemampuan mahasiswa, serta mengintegrasikan teknologi spreadsheet yang mendukung pemahaman konseptual tanpa mengurangi fokus pada aspek matematis. Ketiga subjek penelitian menunjukkan pengalaman pembelajaran yang bermakna dan mengembangkan kesadaran reflektif serta metakognitif, yang mengindikasikan bahwa desain kesempatan belajar tidak hanya meningkatkan kemampuan kognitif tetapi juga kemampuan berpikir kritis dan reflektif mahasiswa.

Daftar Pustaka

- Andini, W. (2024). Pengembangan desain didaktis untuk mengantisipasi learning obstacles berpikir aljabar di sekolah dasar. *AL-TARBIYAH: Jurnal Pendidikan*.
- Hamda, Waliyullah, Akbar. Nasrullah. (2025). Analisis Kemampuan Penalaran Matematis Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Literasi Numerasi ditinjau dari Gaya Belajar. *VENN: Journal of Sustainable Innovation on Education, Mathematics and Natural Sciences*, 4(3), 183-195.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Maria, M., Panggabean, E. M., & Harahap, T. H. (2023). Lintasan belajar berbasis lintasan konseptual pada bilangan bulat. *Jurnal Inovasi Pembelajaran dan Pendidikan Islam*, 4(2), 45–56.
- Nasrullah. Khadijah. Liani, Ahyani Mirah (2024). Analisis kemajuan kemampuan dasar dalam pembelajaran aljabar linear lanjut bagi mahasiswa perguruan tinggi. *Equals: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 7 (2). 119-129.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569743>
- Risnanosanti, R., Prasetyo, A. A., & Syofiana, M. (2023). Hypothetical learning trajectory penalaran matematis materi statistika. *Indiktika: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 10(2), 113–128.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110–113.