

ANALISIS KESTABILAN PENGEMBANGAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19 PENGARUH VAKSINASI DAN KAMPANYE SEBAGAI PROSES DALAM PENGENDALIAN PENYEBARAN PENYAKIT

Nola Curex¹, Syamsuddin Toaha², Kasbawati³

Universitas Hasanuddin^{1,2,3}

ncurex@gmail.com¹, syamsuddint@gmail.com², kasbawati@gmail.com³

Abstrak. Novel Coronavirus atau virus corona adalah jenis virus yang pertama kali ditemukan pada tahun 2003. Hingga saat ini virus ini bermutasi membentuk virus corona jenis baru (SARS-CoV-2) dan menyebabkan munculnya penyakit yang disebut Coronavirus Disease-19 (COVID-19). Penyebaran penyakit COVID-19 begitu cepat sehingga pemerintah melakukan berbagai upaya untuk menekan semakin meluasnya penyebaran penyakit ini. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk melihat bagaimana pengaruh vaksinasi dan kampanye dalam proses pengendalian penyakit dengan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang berpengaruh pada bilangan reproduksi dasar (R_0), dan analisis kestabilan. Hasil analisis sensitivitas, yaitu ditemukan hubungan parameter dengan R_0 yang dapat meningkatkan dan menurunkan nilai R_0 , dan analisis kestabilan menunjukkan pengaruh perubahan kestabilan titik kesetimbangan akibat perubahan nilai parameter vaksinasi, kampanye, dan interaksi. Simulasi model menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi dan kampanye dapat mengendalikan penyebaran penyakit COVID-19 yakni apabila minimal 40% individu di Indonesia menerima vaksin dan 41% daerah di Indonesia memberlakukan kampanye.

Kata Kunci: Model Penyebaran COVID-19, Sensitivitas R_0 , Analisis Kestabilan

Abstract. Novel Coronavirus or corona virus is a type of virus that was first discovered in 2003. Until now this virus has mutated to form a new type of corona virus (SARS-CoV-2) and causes the emergence of a disease called Coronavirus Disease-19 (COVID-19). The spread of COVID-19 is so fast that the government is making various efforts to suppress the spread of this disease. The purpose of this study was to see how the influence of vaccination and campaign in the process of disease control with sensitivity analysis to determine the parameters that affect the basic reproduction number (R_0), and stability analysis. The results of the sensitivity analysis, which found a parameter relationship with R_0 which can increase and decrease the value of R_0 , and stability analysis shows the effect of changes in the stability of the equilibrium point due to changes in the value of vaccination, campaign, and interaction parameters. The model simulation shows that the provision of vaccinations and campaigns can control the spread of COVID-19 disease, namely if at least 40% of individuals in Indonesia receive the vaccine and 41% of regions in Indonesia implement the campaign.

Keywords: COVID-19 Spread Model, Sensitivity R_0 , Stability Analysis

A. Pendahuluan

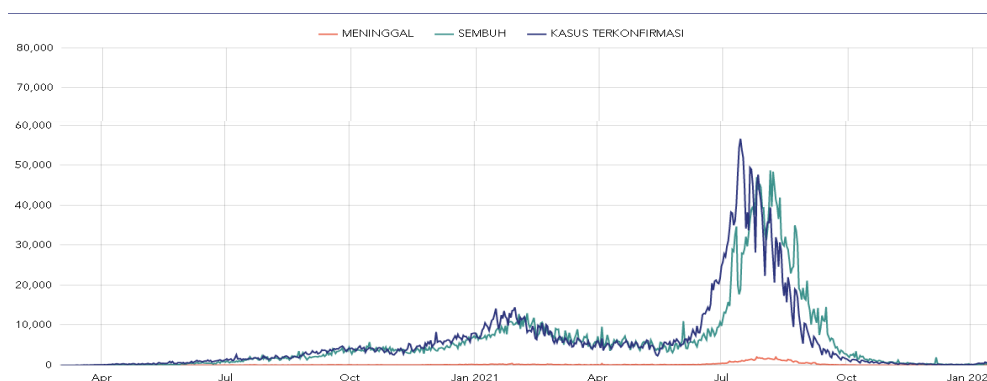
Bidang matematika merupakan salah satu bidang ilmu pengetahuan yang dapat memberikan solusi untuk setiap permasalahan yang ada di dunia, dengan cara memodelkan dan merumuskan permasalahan tersebut (Bahri, 2014). Model matematika umumnya berbentuk sistem persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan suatu permasalahan berdasarkan asumsi-asumsi yang dibangun (Toaha & Rustam, 2017); (Toaha & Azis, 2018). Selanjutnya dilakukan analisis terhadap model matematika yang telah dibentuk agar model tersebut representatif terhadap permasalahan yang dibahas (Beay, dkk., 2017). Bani, dkk., (2021) telah melakukan penelitian model matematika COVID-19 dengan pertimbangan perlakuan PSBB dan imunitas. Selain itu, Abdullah, dkk., (2021) juga mengkaji mengenai COVID-19 dengan menggunakan kompartemen karantina sebagai proses penyembuhan individu terinfeksi



COVID-19. Sementara Annas, dkk., (2020) menggunakan vaksin sebagai proporsi dalam mengendalikan COVID-19 di Indonesia. Kemudian peneliti yang juga mengkaji tentang COVID-19 dan solusinya yaitu Dass, dkk., (2021) peneliti tersebut memodifikasi model matematika SEIR dengan membandingkan strategi intervensi yang berbeda. Selanjutnya pengkajian oleh Wiraya (2021) yaitu dengan mengonstruksi dan menganalisis model matematika interaksi antara sitokin pro-respon dan anti-respon inflamasi untuk memprediksi dinamika pada sistem respon inflamasi, sehingga pengobatan SARS *Coronavirus* dapat dioptimalkan.

Novel Coronavirus atau virus corona adalah jenis virus yang pertama kali ditemukan pada tahun 2003 dan menyebabkan penyakit *Severe Acute Respiratory* (SARS), selanjutnya pada tahun 2012 ditemukan jenis baru dari virus tersebut dan menyebabkan penyakit *Middle East Respiratory Syndrom-Corona Virus* (MERS-CoV) (Fauziah & Manaqib, 2020); (Bani & Toaha, 2021). Terbaru virus ini bermutasi membentuk virus corona jenis baru (SARS-CoV-2) dan menyebabkan munculnya penyakit disebut *Coronavirus Disease-19* (COVID-19); (WHO, 2022).

Hingga tanggal 19 Januari 2022, sebanyak 328.532.929 individu terinfeksi penyakit ini di 226 negara dan individu meninggal dunia sebanyak 5.542.359 (WHO, 2022); (Gugus Tugas, 2022). Penyakit ini pertama kali terkonfirmasi masuk ke Indonesia pada tanggal 02 Maret 2020 dengan jumlah individu terkonfirmasi terinfeksi sebanyak 2 individu. Hingga saat ini jumlah individu terinfeksi sebanyak 4.275.528 individu dengan individu meninggal dunia sebanyak 144.192. Namun, telah banyak pula individu yang terkonfirmasi sembuh dari penyakit ini yaitu sebanyak 4.120.540 individu (Gugus Tugas, 2022) yang diakumulasi dari individu yang sembuh setelah melakukan pengobatan di rumah sakit dan individu yang sembuh setelah melakukan isolasi mandiri di rumah. Grafik penyebaran perhari penyakit COVID-19 di Indonesia dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik Penyebaran Penyakit COVID-19 di Indonesia (Gugus Tugas, 2022)

Penyakit COVID-19 dapat menyerang berbagai golongan usia baik bayi, anak-anak, orang dewasa hingga lansia (Guo, dkk., 2020); (Ndairou, 2020) Virus yang menjadi penyebab penyakit ini menyerang sistem pernapasan manusia dan dapat menyebabkan gangguan sistem pernapasan, pneumonia akut, hingga kematian. Penelitian terbaru di bidang kesehatan menemukan fakta bahwa proses penyebaran penyakit ini yaitu *Human-to-Human Transmission* atau apabila individu sehat berinteraksi secara langsung dengan individu yang terinfeksi, maka individu tersebut akan menjadi terinfeksi apabila individu tersebut tidak memiliki kekebalan tubuh terhadap SARS-CoV-2 (Ivorra, dkk., 2020); (Tuite, dkk., 2020).

Berangkat dari fenomena yang disebutkan sebelumnya, berbagai upaya telah pemerintah lakukan khususnya pemerintah Indonesia dalam menekan semakin meluasnya penyebaran COVID-19 dan meningkatkan kekebalan tubuh masyarakat agar dapat memperkecil kemungkinan terinfeksi walaupun masyarakat melakukan interaksi dengan individu yang terinfeksi penyakit ini. Salah satunya yaitu dengan pemberian vaksinasi, sejauh ini lebih dari

40 perusahaan farmasi dan lembaga akademis di seluruh dunia telah meluncurkan program pengembangan vaksin mereka melawan SARS-CoV-2 (Puteri, dkk., 2021); (Makmun & Hazhiyah, 2020)

Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian yang dilakukan Bani, dkk., pada tahun 2021. Bani, dkk., (2021) melakukan penelitian pada topik yang sama yaitu COVID-19 dan juga menggunakan matematika dalam pemecahan masalah tersebut. Pada model matematika yang dibangun Bani, dkk., (2021) kelompok individu dibagi menjadi 5 kelas yaitu SCPUR (*Susceptible, Carrier, Reported Infected, Unreported Infected, Recovery*) dengan pemberian proporsi berupa pengaruh imunitas tubuh, pemberlakuan PSBB, dan karantina sebagai proses penyembuhan. Pada penelitian ini, model tersebut dikembangkan dengan pembaharuan proporsi yang sebelumnya imunitas tubuh dan pemberlakuan PSBB menjadi vaksinasi dan kampanye.

B. Model Matematika

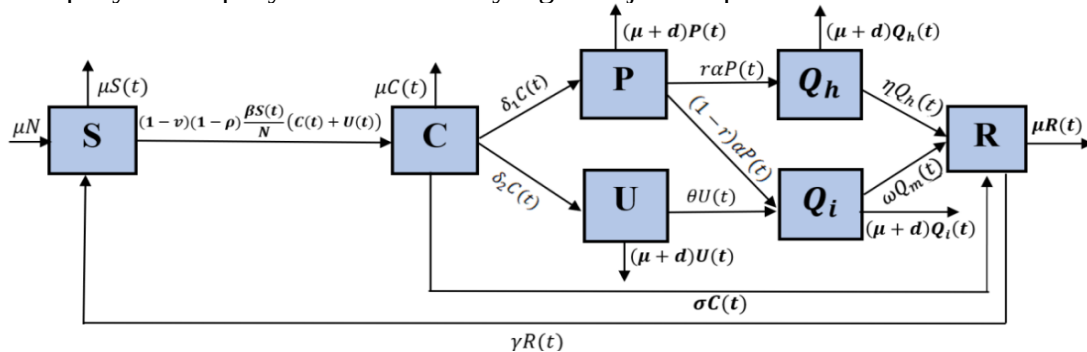
Model matematika yang digunakan pada artikel ini adalah pengembangan dari model yang sebelumnya dibuat oleh Bani, dkk., pada tahun 2021. Pada penelitian sebelumnya populasi dibagi menjadi lima kompartemen, yaitu *Susceptible* (S) atau kelompok individu yang rentan terhadap penyakit, *Carrier* (C) atau kelompok individu terinfeksi penyakit tanpa gejala, *Reported Symptomatic* (P) atau kelompok individu yang terinfeksi penyakit dengan gejala dan melaporkannya, *Unreported Symptomatic* (U) atau kelompok individu terinfeksi penyakit dengan gejala namun tidak melaporkannya, serta *Recovery* (R) atau kelompok individu sembuh dari penyakit. Kemudian pada penelitian tersebut ditambahkan proporsi berupa pemberlakuan PSSB dan pengaruh imunitas sebagai solusi dalam menyelesaikan permasalahan penyakit ini (Bani & Toaha, 2021). Selanjutnya, pada artikel ini dimodifikasi dengan menambahkan dua kompartemen baru yaitu *Quarantine Hospital* (Q_h) atau kelompok individu yang terinfeksi penyakit dengan gejala, selanjutnya melakukan karantina di rumah sakit dan *Quarantine Individuals* (Q_i) atau kelompok individu yang terinfeksi penyakit dengan gejala, selanjutnya melakukan karantina mandiri di rumah. Kemudian proporsi diubah, yang sebelumnya pemberlakuan PSBB dan imunitas tubuh, menjadi pemberian vaksin dan kampanye.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam membangun model matematika COVID-19 sebagai berikut:

1. Kelompok individu pada penelitian ini dibagi menjadi 7 kelas, yaitu *Susceptible* (S), *Carrier* (C), *Reported Symptomatic* (P), *Unreported Symptomatic* (U), *Quarantine Hospital* (Q_h), *Quarantine Individuals* (Q_i), serta *Recovery* (R).
2. Populasi homogen yaitu populasi dimana unsurnya mempunyai sifat yang sama.
3. Individu menjadi terinfeksi penyakit tanpa gejala ($C(t)$) dikarenakan individu tidak melakukan vaksinasi atau vaksinasi tersebut tidak membentuk kekebalan dalam tubuh individu tersebut dan akibat tidak diterapkannya ilmu yang diperoleh dari kampanye.
4. Individu yang dapat menularkan COVID-19 yaitu individu terinfeksi tanpa gejala ($C(t)$) dan individu yang terinfeksi disertai gejala namun tidak melaporkannya ($U(t)$).
5. Individu yang terinfeksi disertai gejala kemudian melaporkannya ($P(t)$), apabila gejala tergolong ringan, maka individu tersebut melakukan karantina mandiri ($Q_i(t)$) namun apabila kesehatan memburuk dan prasarana terpenuhi maka individu tersebut melakukan karantina di rumah sakit ($Q_h(t)$).
6. Individu yang terinfeksi disertai gejala dan tidak melaporkannya ($U(t)$), selanjutnya melakukan karantina mandiri ($Q_i(t)$).
7. Data yang akan digunakan untuk simulasi model adalah data penderita COVID-19 di Indonesia yang diperoleh dari Gugus Tugas COVID-19 dari awal ditemukannya kasus hingga dimulainya penelitian ini.



Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah disebutkan sebelumnya, diperoleh skema dinamika penyebaran penyakit COVID-19 yang ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Skema Dinamika Penyebaran COVID-19

Variabel dan parameter yang digunakan dalam model disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Variabel dan parameter yang digunakan dalam model

Simbol	Keterangan	Syarat	Satuan
$N(t)$	Jumlah keseluruhan populasi pada waktu t	$N(t) > 0$	Orang
$S(t)$	Jumlah individu rentan (<i>Susceptible</i>) pada waktu t	$S(t) > 0$	Orang
$C(t)$	Jumlah individu terinfeksi tanpa gejala (<i>Carrier</i>) pada waktu t	$C(t) \geq 0$	Orang
$P(t)$	Jumlah individu terinfeksi disertai gejala dan melaporkannya (<i>Reported Symptomatic Infectious Individuals</i>) pada waktu t	$P(t) \geq 0$	Orang
$U(t)$	Jumlah individu terinfeksi disertai gejala namun tidak melaporkannya (<i>Unreported Symptomatic Infectious Individuals</i>) pada waktu t	$U(t) \geq 0$	Orang
$Q_h(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi COVID-19 selanjutnya melakukan karantina di rumah sakit (<i>Quarantine Hospital</i>) pada waktu t	$Q_h(t) \geq 0$	Orang
$Q_i(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi COVID-19 dan melakukan karantina mandiri (<i>Quarantine Individuals</i>) pada waktu t	$Q_i(t) \geq 0$	Orang
$R(t)$	Jumlah individu sembuh (<i>Recovered</i>) pada waktu t	$R(t) \geq 0$	Orang
μN	Tingkat kelahiran alami	$\mu N > 0$	$\frac{\text{orang}}{\text{hari}}$
μ	Tingkat kematian alami	$\mu > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
$1-v$	Proporsi individu rentan yang tidak memperoleh vaksin	$0 \leq v \leq 1$	-
$1-\rho$	Proporsi tidak diterapkannya pengetahuan yang diperoleh dari kampanye yang diberikan	$0 \leq \rho \leq 1$	-
β	Rata-rata laju perpindahan kelompok individu rentan menjadi individu terinfeksi tanpa gejala akibat adanya interaksi dengan individu terinfeksi.	$\beta \geq 0$	$\frac{1}{\text{orang} \cdot \text{hari}}$
δ	Rata-rata laju perpindahan akibat munculnya gejala	$\delta > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
σ	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi tanpa gejala menjadi individu yang sembuh dari penyakit	$\sigma > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
α	Laju perpindahan individu yang terinfeksi dengan gejala dan melaporkannya kemudian dilakukan karantina	$\alpha > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$



Simbol	Keterangan	Syarat	Satuan
r	Proporsi tersedianya prasarana sehingga individu dapat melakukan karantina di rumah sakit	$0 \leq r \leq 1$	-
$1 - r$	Proporsi prasarana yang tidak memadai sehingga individu melakukan karantina mandiri	$0 \leq r \leq 1$	-
θ	Laju perpindahan individu terinfeksi dengan gejala namun tidak melaporkannya kemudian melakukan karantina mandiri	$\theta > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
η	Laju perpindahan individu terinfeksi yang melakukan karantina di rumah sakit, menjadi individu yang sembuh dari penyakit.	$\eta > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
ω	Laju perpindahan individu terinfeksi yang melakukan karantina mandiri, menjadi individu yang sembuh dari penyakit.	$\omega > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ	Laju perpindahan individu yang sembuh dari penyakit menjadi rentan terinfeksi Kembali	$\gamma > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
d	Tingkat kematian dikarenakan COVID-19	$d > 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$

Selanjutnya diperoleh model matematika penyebaran penyakit COVID-19 diberikan oleh persamaan (2.1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \mu N + \gamma R(t) - (1 - v)(1 - \rho) \frac{\beta S(t)}{N} (C(t) + U(t)) - \mu S(t), \\
 \frac{dC(t)}{dt} &= (1 - v)(1 - \rho) \frac{\beta S(t)}{N} (C(t) + U(t)) - (\delta + \delta + \mu) C(t), \\
 \frac{dP(t)}{dt} &= \delta_1 C(t) - (r\alpha + (1 - r)\alpha + \mu + d) P(t), \\
 \frac{dU(t)}{dt} &= \delta_2 C(t) - (\theta + \mu + d) U(t), \\
 \frac{dQ_h(t)}{dt} &= r\alpha P(t) - (\eta + \mu + d) U(t), \\
 \frac{dQ_i(t)}{dt} &= (1 - r)\alpha P(t) + \theta U(t) - (\omega + \mu + d) Q_i(t), \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \sigma C(t) + \eta Q_h(t) + \omega Q_i(t) - (\gamma + \mu) R(t).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kemudian dilakukan normalisasi dengan cara mensubstitusi variabel tidak berdimensi sebagai berikut:

$$k_1 = \frac{S(t)}{N(t)}, k_2 = \frac{C(t)}{N(t)}, k_3 = \frac{P(t)}{N(t)}, k_4 = \frac{U(t)}{N(t)}, k_5 = \frac{Q_h(t)}{N(t)}, k_6 = \frac{Q_i(t)}{N(t)}, k_7 = \frac{R(t)}{N(t)},$$

sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear yang tidak berdimensi pada persamaan (2.2).

$$\begin{aligned}
 \frac{dk_1}{dt} &= \mu + \gamma k_7 - (1 - v)(1 - \rho) \beta k_1 (k_2 + k_4) - \mu k_1, \\
 \frac{dk_2}{dt} &= (1 - v)(1 - \rho) \beta k_1 (k_2 + k_4) - (\sigma + \delta + \mu) k_2, \\
 \frac{dk_3}{dt} &= \delta_1 k_2 - (r\alpha + (1 - r)\alpha + \mu + d) k_3, \\
 \frac{dk_4}{dt} &= \delta_2 k_2 - (\theta + \mu + d) k_4, \\
 \frac{dk_5}{dt} &= r\alpha k_3 - (\eta + \mu + d) k_5, \\
 \frac{dk_6}{dt} &= (1 - r)\alpha k_3 + \theta k_4 - (\omega + \mu + d) k_6, \\
 \frac{dk_7}{dt} &= \sigma k_2 + \eta k_5 + \omega k_6 - (\gamma + \mu) k_7.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$



C. Hasil dan Pembahasan

1. Titik Keseimbangan Model dan Kestabilannya

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis dengan menentukan titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik pada sistem persamaan (2.2). Keadaan titik tetap keseimbangan model dipenuhi ketika $\frac{dk_1}{dt} = 0, \frac{dk_2}{dt} = 0, \frac{dk_3}{dt} = 0, \frac{dk_4}{dt} = 0, \frac{dk_5}{dt} = 0, \frac{dk_6}{dt} = 0, \frac{dk_7}{dt} = 0$.

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan dimana semua kompartemen yang berhubungan dengan penyakit bernilai nol atau pada saat itu tidak terjadi penyebaran penyakit di suatu poulasi, diperoleh titik ekuilibrium non endemik, yaitu $E_0 = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Titik keseimbangan endemik adalah suatu keadaan terjadi penyebaran penyakit pada suatu popuasi dan terjadi pada saat $k_2 > 0$ dan $k_4 > 0$. Dari sistem persamaan (2.2) diperoleh titik ekuilibrium endemik, yaitu $E_1 = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = \left(\frac{\mu + \gamma k_7^*}{((1-v)(1-\rho)\beta(k_2^* + k_4^*) + \mu)}, \frac{(1-v)(1-\rho)\beta k_1^* k_4^*}{((\sigma + \delta + \mu) - (1-v)(1-\rho)\beta k_1^*)}, \frac{\delta_1 k_2^*}{(r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d)}, \frac{\delta_2 k_2^*}{(\theta + \mu + d)}, \frac{r\alpha k_3^*}{(\eta + \mu + d)}, \frac{(1-r)\alpha k_3^* + \theta k_4^*}{(\omega + \mu + d)}, \frac{\sigma k_2^* + \eta k_5^* + \omega k_6^*}{(\gamma + \mu)} \right)$.

Setelah diperoleh titik keseimbangan, selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik. Langkah pertama yaitu melakukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobi pada sistem persamaan nonlinier model penyebaran penyakit COVID-19 berikut:

$$f = \mu + \gamma k_7 - (1-v)(1-\rho)\beta k_1(k_2 + k_4) - \mu k_1, \quad (3.1)$$

$$g = (1-v)(1-\rho)\beta k_1(k_2 + k_4) - (\sigma + \delta + \mu)k_2, \quad (3.2)$$

$$h = \delta_1 k_2 - (r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d)k_3, \quad (3.3)$$

$$i = \delta_2 k_2 - (\theta + \mu + d)k_4, \quad (3.4)$$

$$j = r\alpha k_3 - (\eta + \mu + d)k_5, \quad (3.5)$$

$$k = (1-r)\alpha k_3 + \theta k_4 - (\omega + \mu + d)k_6, \quad (3.6)$$

$$l = \sigma k_2 + \eta k_5 + \omega k_6 - (\gamma + \mu)k_7. \quad (3.7)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.1) hingga (3.7) diperoleh matriks Jacobi pada persamaan (3.8)

$$J_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial k_1} & \frac{\partial f}{\partial k_2} & \frac{\partial f}{\partial k_3} & \frac{\partial f}{\partial k_4} & \frac{\partial f}{\partial k_5} & \frac{\partial f}{\partial k_6} & \frac{\partial f}{\partial k_7} \\ \frac{\partial g}{\partial k_1} & \frac{\partial g}{\partial k_2} & \frac{\partial g}{\partial k_3} & \frac{\partial g}{\partial k_4} & \frac{\partial g}{\partial k_5} & \frac{\partial g}{\partial k_6} & \frac{\partial g}{\partial k_7} \\ \frac{\partial h}{\partial k_1} & \frac{\partial h}{\partial k_2} & \frac{\partial h}{\partial k_3} & \frac{\partial h}{\partial k_4} & \frac{\partial h}{\partial k_5} & \frac{\partial h}{\partial k_6} & \frac{\partial h}{\partial k_7} \\ \frac{\partial i}{\partial k_1} & \frac{\partial i}{\partial k_2} & \frac{\partial i}{\partial k_3} & \frac{\partial i}{\partial k_4} & \frac{\partial i}{\partial k_5} & \frac{\partial i}{\partial k_6} & \frac{\partial i}{\partial k_7} \\ \frac{\partial j}{\partial k_1} & \frac{\partial j}{\partial k_2} & \frac{\partial j}{\partial k_3} & \frac{\partial j}{\partial k_4} & \frac{\partial j}{\partial k_5} & \frac{\partial j}{\partial k_6} & \frac{\partial j}{\partial k_7} \\ \frac{\partial k}{\partial k_1} & \frac{\partial k}{\partial k_2} & \frac{\partial k}{\partial k_3} & \frac{\partial k}{\partial k_4} & \frac{\partial k}{\partial k_5} & \frac{\partial k}{\partial k_6} & \frac{\partial k}{\partial k_7} \\ \frac{\partial l}{\partial k_1} & \frac{\partial l}{\partial k_2} & \frac{\partial l}{\partial k_3} & \frac{\partial l}{\partial k_4} & \frac{\partial l}{\partial k_5} & \frac{\partial l}{\partial k_6} & \frac{\partial l}{\partial k_7} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Pada bagian ini, titik keseimbangan bebas penyakit yang akan dianalisis kestabilannya. Jika titik keseimbangan bebas penyakit (E_0) disubstitusi ke dalam matriks (3.8), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & -(1-v)(1-\rho) & 0 & -(1-v)(1-\rho) & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -\sigma - \delta - \mu + (1-v)(1-\rho)\beta & 0 & (1-v)(1-\rho) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & -r\alpha - (1-r)\alpha - \mu - d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & -\theta - \mu - d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\alpha & 0 & -\eta - \mu - d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-r)\alpha & \theta & 0 & -\omega - \mu - d & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 & \eta & \omega & -\gamma - \mu & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Selanjutnya, akan dicari nilai eigen dari matriks (3.9). Persamaan karakteristik dari matriks J_{E_0} adalah sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0 \text{ atau}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & -(1-v)(1-\rho) & 0 & -(1-v)(1-\rho) & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \lambda + \sigma + \delta + \mu - (1-v)(1-\rho)\beta & 0 & (1-v)(1-\rho) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \lambda + r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \lambda + \theta + \mu + d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\alpha & 0 & \lambda + \eta + \mu + d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-r)\alpha & \theta & 0 & \lambda + \omega + \mu + d & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 & \eta & \omega & \lambda + \gamma + \mu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \eta + \mu + d)(\lambda + \mu + \omega + d)(\lambda + \alpha + \mu + d)(\lambda^2 + (\beta\rho v - \beta\rho - \beta v + \beta - d - \delta - 2\mu - \sigma - \theta)\lambda + (\beta d\rho v + \beta\mu\rho v + \beta\rho\theta v + \beta\rho v\delta_2 - \beta d\rho - \beta d v - \beta\mu\rho - \beta\mu v - \beta\rho\theta - \beta\rho\delta_2 - \beta\theta v - \beta v\delta_2 + \beta d + \beta\mu + \beta\theta + \beta\delta_2 - d\delta - d\mu - d\sigma - \delta\mu - \delta\theta - \mu\sigma - \mu^2 - \mu\theta)) = 0.$$

Dari persamaan karakteristik di atas, diperoleh tujuh nilai eigen sebagai berikut:

- $\lambda + \mu = 0$
 $\lambda_1 = -\mu$
- $\lambda + \gamma + \mu = 0$
 $\lambda_2 = -\gamma - \mu$
- $\lambda + \eta + \mu + d = 0$
 $\lambda_3 = -\eta - \mu - d$
- $\lambda + \mu + \omega + d = 0$
 $\lambda_4 = -\mu - \omega - d$
- $\lambda + \alpha + \mu + d = 0$
 $\lambda_5 = -\alpha - \mu - d$
- $\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0$

dengan

$$A_1 = \beta\rho v - \beta\rho - \beta v + \beta - d - \delta - 2\mu - \sigma - \theta$$

$$A_2 = \beta d\rho v + \beta\mu\rho v + \beta\rho\theta v + \beta\rho v\delta_2 - \beta d\rho - \beta d v - \beta\mu\rho - \beta\mu v - \beta\rho\theta - \beta\rho\delta_2 - \beta\theta v - \beta v\delta_2 + \beta d + \beta\mu + \beta\theta + \beta\delta_2 - d\delta - d\mu - d\sigma - \delta\mu - \delta\theta - \mu\sigma - \mu^2 - \mu\theta$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, akar-akar persamaan tersebut mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$ sehingga $A_1 A_2 > 0$. Karena diasumsikan semua parameter positif, maka $A_1 > 0$ ketika $\beta\rho v + \beta > \beta\rho + \beta v + d + \delta + 2\mu + \sigma + \theta$ dan $A_2 > 0$ ketika $\beta d\rho v + \beta\mu\rho v + \beta\rho\theta v + \beta\rho v\delta_2 + \beta d + \beta\mu + \beta\theta + \beta\delta_2 > \beta d\rho + \beta d v + \beta\mu\rho + \beta\mu v + \beta\rho\theta + \beta\rho\delta_2 + \beta\theta v + \beta v\delta_2 + d\delta + d\mu + d\sigma + \delta\mu + \delta\theta + \mu\sigma + \mu^2 + \mu\theta$. Apabila kondisi tersebut terpenuhi maka $A_1 A_2 > 0$. Jadi diperoleh $\lambda_6 < 0$ dan $\lambda_7 < 0$. Jika nilai $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal (Willems, 1970).

Selanjutnya untuk titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S^*, C^*, P^*, U^*, Q_h^*, Q_i^*, R^*)$ disubstitusi ke matriks Jacobi J_E pada persamaan (3.8) sehingga diperoleh hasil

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -a & -rh_1 & 0 & -rh_1 & 0 & 0 & rh_2 \\ rh_3 & -b & 0 & rh_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rh_4 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rh_5 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rh_6 & 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rh_7 & rh_8 & 0 & -f & 0 \\ 0 & rh_9 & 0 & 0 & rh_{10} & rh_{11} & -g \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

dimana $a = (1-v)(1-\rho)\beta(k_2 + k_4) + \mu$, $b = \sigma + \delta + \mu - (1-v)(1-\rho)\beta k_1$,
 $c = r\alpha - (1-r)\alpha - \mu - d$, $d = \theta + \mu + d$, $e = \eta + \mu + d$, $f = \omega + \mu + d$, $g = \gamma + \mu$,
 $rh_1 = (1-v)(1-\rho)\beta k_1$, $rh_2 = \gamma$, $rh_3 = (1-v)(1-\rho)\beta(k_2 + k_4)$, $rh_4 = \delta_1$, $rh_5 = \delta_2$,
 $rh_6 = r\alpha$, $rh_7 = (1-r)\alpha$, $rh_8 = \theta$, $rh_9 = \sigma$, $rh_{10} = \eta$, $rh_{11} = \omega$

Kestabilan titik kesetimbangan endemik dianalisis melalui nilai eigen dari matriks J_{E_1} pada persamaan (3.10). Nilai eigen tersebut merupakan solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J_{E_1}) = 0$ atau

$$\lambda^7 + A_1\lambda^6 + A_2\lambda^5 + A_3\lambda^4 + A_4\lambda^3 + A_5\lambda^2 + A_6\lambda + A_7 = 0, \quad (3.11)$$

dengan

$$A_1 = a + b + c + d + e + f + g$$

$$A_2 = ab + ac + ad + ae + ag + af + bc + bd + be + bg + bf + cd + ce + cg + cf + de + dg + df + eg + ef + gf + rh_1rh_3 - rh_1rh_5,$$

$$A_3 = abc + abd + abe + abg + abf + acd + ace + acg + acf + ade + adg + adf + aeg + agf - arh_1rh_5 + bcd + bce + +bcg + bcf + bde + bdg + bdf + beg + bef + bgf + cde + cdg + cdf + ceg + cef + cgf + +crh_1rh_3 - crh_1rh_5 + deg + def + dgf + drh_1rh_3 + egf + erh_1rh_3 - erh_1rh_5 + grh_1rh_3 - grh_1rh_5 - rh_{10}rh_2rh_3 + frh_1rh_3 - frh_1rh_5 + rh_1rh_3rh_5,$$

$$A_4 = abcd + abce + abcg + abcf + abde + abdg + abdf + abeg + abef + abgf + acde + acdg + acdf + aceg + acef + acgf - acrh_1rh_5 + adeg + adef + adgf + aegf - aerh_1rh_5 - agrh_1rh_5 - afrh_1rh_5 + +bcde + bcdg + bcdf + bceg + bcef + bcfg + bdeg + bdef + bdgf + begf + cdeg + cdef + cdgf + cdrh_1rh_3 + cegf + cerh_1rh_3 - cerh_1rh_5 + cgrh_1rh_3 - cgrh_1rh_5 - crh_{10}rh_2rh_3 - cfrh_1rh_3 - cfrh_1rh_5 + crh_1rh_3rh_5 + degf + derh_1rh_3 + dgrh_1rh_3 - drh_{10}rh_2rh_3 + dfrh_1rh_3 + egrh_1rh_3 - egrh_1rh_5 - erh_{10}rh_2rh_3 + efrh_1rh_3 - efrh_1rh_5 + erh_1rh_3rh_5 + gfrh_1rh_3 - gfrh_1rh_5 + grh_1rh_3rh_5 - rh_{10}rh_2rh_3rh_5 + frh_1rh_3rh_5,$$

$$A_5 = abcde + abcdg + abcdf + abceg + abcef + abcgf + acde + acdg + acdf + aceg + acef + acgf - acrh_1rh_5 + adeg + adef + adgf + aegf - aerh_1rh_5 - agrh_1rh_5 - afrh_1rh_5 + bcde + bcdg + bcdf + bceg + bcef + bcfg + bdeg + bdef + bdgf + begf + cdeg + cdef + cdgf + cdrh_1rh_3 + cegf + cerh_1rh_3 - cerh_1rh_5 + cgrh_1rh_3 - cgrh_1rh_5 - crh_{10}rh_2rh_3 + cfrh_1rh_3 - cfrh_1rh_5 + crh_1rh_3rh_5 + degf + derh_1rh_3 + dgrh_1rh_3 - drh_{11}rh_2rh_3 + dfrh_1rh_3 + egrh_1rh_3 - egrh_1rh_3rh_5 - erh_{10}rh_2rh_3 + efrh_1rh_3rh_5 + gfrh_1rh_3rh_5 - rh_{10}rh_2rh_3rh_5 - rh_2rh_3rh_4rh_6 - rh_2rh_{11}rh_3rh_4,$$

$$A_6 = abcdeg + abcdef + abcdgf + abcegf + abdegf + acdegf - acegrh_1rh_5 - acefrh_1rh_5 - acgfrh_1rh_5 - aegfrh_1rh_5 + bcdegf + cdegfrh_1rh_3 - cderh_{11}rh_2rh_3 + cdefrh_1rh_3 + cdgfrh_1rh_3 - cdrh_{10}rh_2rh_3 + cegfrh_1rh_3 - cegfrh_1rh_5 + cegrh_1rh_3rh_5 - cerh_{10}rh_2rh_3 + cefrh_1rh_3rh_5 + cgfrh_1rh_3rh_5 - crh_{11}rh_2rh_3rh_5 + degfrh_1rh_3 - derh_{10}rh_2rh_3rh_5 - drh_{10}rh_2rh_3rh_4rh_6 - drh_{10}rh_2rh_9rh_3rh_4 + egfrh_1rh_3rh_5 - erh_{10}rh_{11}rh_2rh_3rh_5 - erh_{11}rh_2rh_9rh_3rh_4 - rh_{10}rh_2rh_7rh_3rh_5 - rh_{11}rh_2rh_7rh_9rh_3rh_4 - rh_{10}rh_2rh_3rh_4rh_6,$$



$$A_7 = abcdefg - acegrh_1rh_5 + cdegfrh_1rh_3 - cdefrh_{11}rh_2rh_3 + cegfrh_1rh_3rh_5 - cerh_{10}rh_9rh_2rh_3rh_5 - crh_{10}rh_9rh_2rh_7rh_3rh_5 - derh_{11}rh_2rh_9rh_3rh_4 - drh_{11}rh_2rh_7rh_9rh_3rh_4 - dfrh_{11}rh_2rh_3rh_4rh_6.$$

Selanjutnya, analisis kestabilan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk persamaan karakteristik polynomial orde tujuh yang ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik polynomial orde tujuh

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
λ_7	1	A_2	A_4	A_6	0
λ_6	A_1	A_3	A_5	A_7	0
λ_5	$k_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$	$k_2 = \frac{A_1A_4 - A_5}{A_1}$	$k_2 = \frac{A_6A_1 - A_7}{A_1}$	0	0
λ_4	$k_4 = \frac{k_1A_3 - A_1k_2}{k_1}$	$k_3 = \frac{k_1A_5 - A_1k_3}{k_1}$	A_7	0	0
λ_3	$k_6 = \frac{k_2k_4 - k_1k_5}{k_4}$	$k_7 = \frac{k_3k_4 - k_1A_7}{k_4}$	0	0	0
λ_2	$k_8 = \frac{k_5k_6 - k_4k_7}{k_6}$	A_7	0	0	0
λ_1	$k_9 = \frac{k_7k_8 - k_6A_7}{k_8}$	0	0	0	0
λ_0	A_7	0	0	0	0

Berdasarkan Tabel 3., polinomial orde tujuh mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen dari kolom pertama semuanya positif (Puteri dkk, 2021). Jelas bahwa $A_1 > 0$, maka $k_1 > 0$ apabila $A_2 > 0$ dan $A_1A_2 > A_3$. Selanjutnya $k_4 > 0$ apabila $A_3 > 0$, $k_2 > 0$, dan $k_1A_3 > A_1k_2$. Selanjutnya $k_6 > 0$ apabila $k_5 > 0$ dan $k_2k_4 > k_1k_5$. Selanjutnya $k_8 > 0$ apabila $k_7 > 0$ dan $k_5k_6 > k_4k_7$. Kemudian, $k_9 > 0$ apabila $A_7 > 0$ dan $k_7k_8 > k_6A_7$. Apabila syarat-syarat tersebut terpenuhi, maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal (Willems, 1970).

2. Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar dan Sensitivitasnya

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0 merupakan nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung (Van den Driessche, 2017); (Ahmad, dkk., 2020). Penentuan bilangan R_0 dilakukan dengan menggunakan pendekatan matriks *The Next Generation* dimana bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) dinyatakan sebagai $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$, dengan $\rho(FV^{-1})$ merupakan spektral radius dari matriks FV^{-1} (Driessche dan Watmough, 2002). Tinjau subpopulasi terinfeksi pada persamaan (2.2), yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dk_2}{dt} &= (1-v)(1-\rho)\beta k_1(k_2+k_4) - (\sigma + \delta + \mu)k_2, \\ \frac{dk_3}{dt} &= \delta_1 k_2 - (r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d)k_3, \\ \frac{dk_4}{dt} &= \delta_2 k_2 - (\theta + \mu + d)k_4, \\ \frac{dk_5}{dt} &= r\alpha k_3 - (\eta + \mu + d)k_5, \\ \frac{dk_6}{dt} &= (1-r)\alpha k_3 + \theta k_4 - (\omega + \mu + d)k_6.\end{aligned}$$

Misalkan $F_i(x)$ adalah laju penambahan infeksi baru pada kompartemen k_2 dan $V_i(x)$ adalah laju perpindahan individu pada kompartemen k_2 , sehingga diperoleh $F_i(x)$ dan $V_i(x)$ sebagai berikut:



$$F_i(x) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-v)(1-\rho)\beta k_1(k_2+k_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$V_i(x) = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma + \delta + \mu)k_2 \\ -\delta_1 k_2 + (r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d)k_3 \\ -\delta_2 k_2 + (\theta + \mu + d)k_4 \\ -r\alpha k_3 + (\eta + \mu + d)k_5 \\ -((1-r)\alpha k_3 + \theta k_4) + (\omega + \mu + d)k_6 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Dengan demikian, matriks jacobii dari persamaan (3.12) dan (3.13) diperoleh:

$$F = \frac{\partial F_i(E_0)}{\partial k_j} = \begin{pmatrix} (1-v)(1-\rho)\beta k_1 & 0 & (1-v)(1-\rho)\beta k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$V = \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial k_j} = \begin{pmatrix} (\sigma + \delta + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & (r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d) & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_2 & 0 & (\theta + \mu + d) & 0 & 0 \\ 0 & -r\alpha & 0 & (\eta + \mu + d) & 0 \\ 0 & -(1-r)\alpha & -\theta & 0 & (\omega + \mu + d) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Selanjutnya akan dicari invers matriks V sebagai berikut :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta_1}{BA} & \frac{1}{B} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta_2}{CA} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{r\alpha\delta_1}{ABD} & \frac{r\alpha}{BD} & 0 & \frac{1}{D} & 0 \\ \frac{-C\alpha\delta_1+B\theta\delta_2-C\alpha\delta_1}{ABCE} & -\frac{\alpha(1-r)}{EB} & -\frac{\theta}{EC} & 0 & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

dimana $A = \sigma + \delta + \mu$, $B = r\alpha + (1-r)\alpha + \mu + d$, $C = \theta + \mu + d$, $D = \eta + \mu + d$, $E = \omega + \mu + d$. Selanjutnya, matriks F dikalikan dengan invers matriks V sehingga diperoleh:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{A} + \frac{(1-v)(1-\rho)\beta\delta_2}{AC} & 0 & \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Matriks FV^{-1} yang diperoleh diistilahkan sebagai matriks generasi. Persamaan karakteristik dari FV^{-1} diperoleh $\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0$ atau

$$\left(\lambda - \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{A} - \frac{(1-v)(1-\rho)\beta\delta_2}{AC} \right) \lambda^4 = 0 \quad (3.18)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.18), diperoleh akar-akar persamaan yaitu $\lambda_1 = \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{A} + \frac{(1-v)(1-\rho)\beta\delta_2}{AC}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, dan $\lambda_5 = 0$, dengan $A = \sigma + \delta + \mu$ dan $C = \theta + \mu + d$.

Berdasarkan akar-akar tersebut diperoleh spektral radius dari matriks generasi FV^{-1} adalah

$$\lambda_{max} = \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{A} + \frac{(1-v)(1-\rho)\beta\delta_2}{AC} \quad (3.19)$$

Kemudian λ_{max} tersebut yang diistilahkan sebagai bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$)

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(1-v)(1-\rho)\beta}{A} + \frac{(1-v)(1-\rho)\beta\delta_2}{AC} \quad (3.20)$$

Selanjutnya, nilai A dan C disubstitusi ke persamaan (3.20), sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) sebagai berikut:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(1-v)(1-\rho)\beta(\theta + \mu + \delta_2 + d)}{(\theta + \mu + d)(\sigma + \delta + \mu)}. \quad (3.21)$$

Selanjutnya analisis sensitivitas dilakukan untuk menunjukkan pengaruh parameter-parameter terhadap bilangan reproduksi dasar.

Definisi 3.1 *Normalisasi indeks sensitivitas diperoleh dengan normalisasi dari variabel v yang terdiferensial oleh parameter p , yang didefinisikan sebagai berikut;*

$$C_p^v = \frac{\partial v}{\partial p} \times \frac{p}{v} \quad (3.22)$$

dimana v adalah variabel yang akan dianalisis dengan p (Chitnis, 2008)

Selanjutnya, berdasarkan model penyebaran penyakit COVID-19, variabel yang akan diukur adalah bilangan $\mathcal{R}_0$ terhadap parameter yang mempengaruhi. Adapun hasil analisis sensitivitas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_v^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial v} \times \frac{v}{\mathcal{R}_0} = -\frac{v}{1-v}, \quad 0 \leq v \leq 1 \\ C_p^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} \times \frac{p}{\mathcal{R}_0} = -\frac{p}{1-p}, \quad 0 \leq p \leq 1 \\ C_\beta^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} = 1, \quad \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dari hasil yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa untuk setiap nilai parameter diasumsikan positif, maka parameter proporsi pemberian vaksinasi (v) dan proporsi kampanye (p) memiliki hubungan negatif dengan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$). Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai parameter proporsi pemberian vaksinasi dan proporsi kampanye dinaikkan, nilai bilangan reproduksi dasar akan turun berlaku pula sebaliknya. Kemudian untuk parameter



interaksi antara individu sehat dengan individu terinfeksi (β) memiliki hubungan positif dengan bilangan reproduksi dasar (R_0). Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai dari parameter tersebut dinaikkan, maka nilai bilangan reproduksi dasar juga akan naik, begitupula sebaliknya.

3. Simulasi Numerik Model Matematika COVID-19

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik terhadap parameter-parameter yang telah diuji sensitivitasnya terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0) yaitu parameter proporsi ν , proporsi ρ , dan β dengan pemberian nilai parameter yang berbeda-beda. Kemudian untuk nilai parameter-parameter lain yaitu $\mu = 0.00322$, $\delta = 0.2$, $\delta_1 = 0.04$, $\delta_2 = 0.04$, $\sigma = 0.17$, $\gamma = 0.01$, $d = 0.5$ (Ahmad, dkk) $\alpha = 0.33$, $r = 0.0002$, $\theta = 0.4$, $\eta = 0.05$, dan $\omega = 0.071$. Simulasi numerik untuk parameter proporsi pemberian vaksin, hasil dari simulasi numerik tersebut disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Sensitivitas parameter proporsi ν terhadap R_0

ν	R_0	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Kestabilannya	Titik Keseimbangan Endemik dan Kestabilannya
0.2	1.343	$\lambda_6 = -0.9219$, $\lambda_7 = 0.1254$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil
0.3	1.175	$\lambda_6 = -0.9205$, $\lambda_7 = 0.0641$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil
0.405	0.999	$\lambda_6 = -0.9190$, $\lambda_7 = -0.000403$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada
0.7	0.503	$\lambda_6 = -0.9132$, $\lambda_7 = -0.18322$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada

Dari Tabel 4 diperoleh hasil bahwa ketika parameter proporsi pemberian vaksin kepada individu rentan (ν) diberi nilai 0.2, maknanya hanya 20% penduduk di Indonesia menerima vaksin, maka COVID-19 akan tetap ada di Indonesia. Hal ini dilihat dari nilai $R_0 > 1$ yaitu 1.343. Sehingga titik keseimbangan endemik stabil. Begitu pula ketika nilai parameter (ν) ditingkatkan hingga 0.03. Namun, berbeda ketika nilai parameter (ν) ditingkatkan menjadi 0.405 atau paling tidak 40.5% penduduk di Indonesia menerima vaksin maka COVID-19 akan hilang dari Indonesia. Hal ini terlihat dari nilai $R_0 < 1$ yaitu 0.999, maka titik keseimbangan bebas penyakit stabil. Semakin diperbesar nilai parameter pemberian vaksin (ν) atau semakin banyak masyarakat Indonesia yang menerima vaksin, maka $R_0 \ll 1$. Atau dengan kata lain, semakin besar peluang COVID-19 diharapkan akan hilang dari Indonesia. Selanjutnya simulasi numerik untuk parameter proporsi kampanye (ρ). Hasil dari simulasi numerik tersebut disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Sensitivitas parameter proporsi ρ terhadap R_0

ρ	R_0	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Kestabilannya	Titik Keseimbangan Endemik dan Kestabilannya
0.2	1.343	$\lambda_6 = -0.9219$, $\lambda_7 = 0.1254$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil



0.35	1.091	$\lambda_6 = -0.9198$, $\lambda_7 = 0.0334$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil
0.41	0.9905	$\lambda_6 = -0.9189$, $\lambda_7 = -0.00348$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada
0.6	0.671	$\lambda_6 = -0.9154$, $\lambda_7 = -0.12095$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada

Dari Tabel 5 diperoleh hasil bahwa ketika parameter proporsi kampanye(ρ) diberi nilai 0.2, maknanya dilakukan kampanye di 20% daerah di Indonesia maka COVID-19 akan tetap ada di Indonesia. Hal ini dilihat dari nilai $R_0 > 1$ yaitu 1.343. Sehingga titik kesetimbangan endemik stabil. Begitupula ketika nilai parameter (ρ) ditingkatkan hingga 0.035. Namun, berbeda ketika nilai parameter (ρ) ditingkatkan menjadi 0.41 atau paling tidak kampanye dilakukan di 41% daerah di Indonesia maka COVID-19 akan hilang dari Indonesia. Hal ini terlihat dari nilai $R_0 < 1$ yaitu 0.9905, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil, dan seterusnya. Semakin diperbesar nilai parameter proporsi kampanye (ρ) atau kampanye dilakukan dibanyak daerah di Indonesia, maka $R_0 \ll 1$ atau dengan kata lain, semakin besar peluang COVID-19 diharapkan akan hilang dari Indonesia. Selanjutnya simulasi numerik untuk parameter interaksi (β) yang hasilnya disajikan pada Tabel 6.

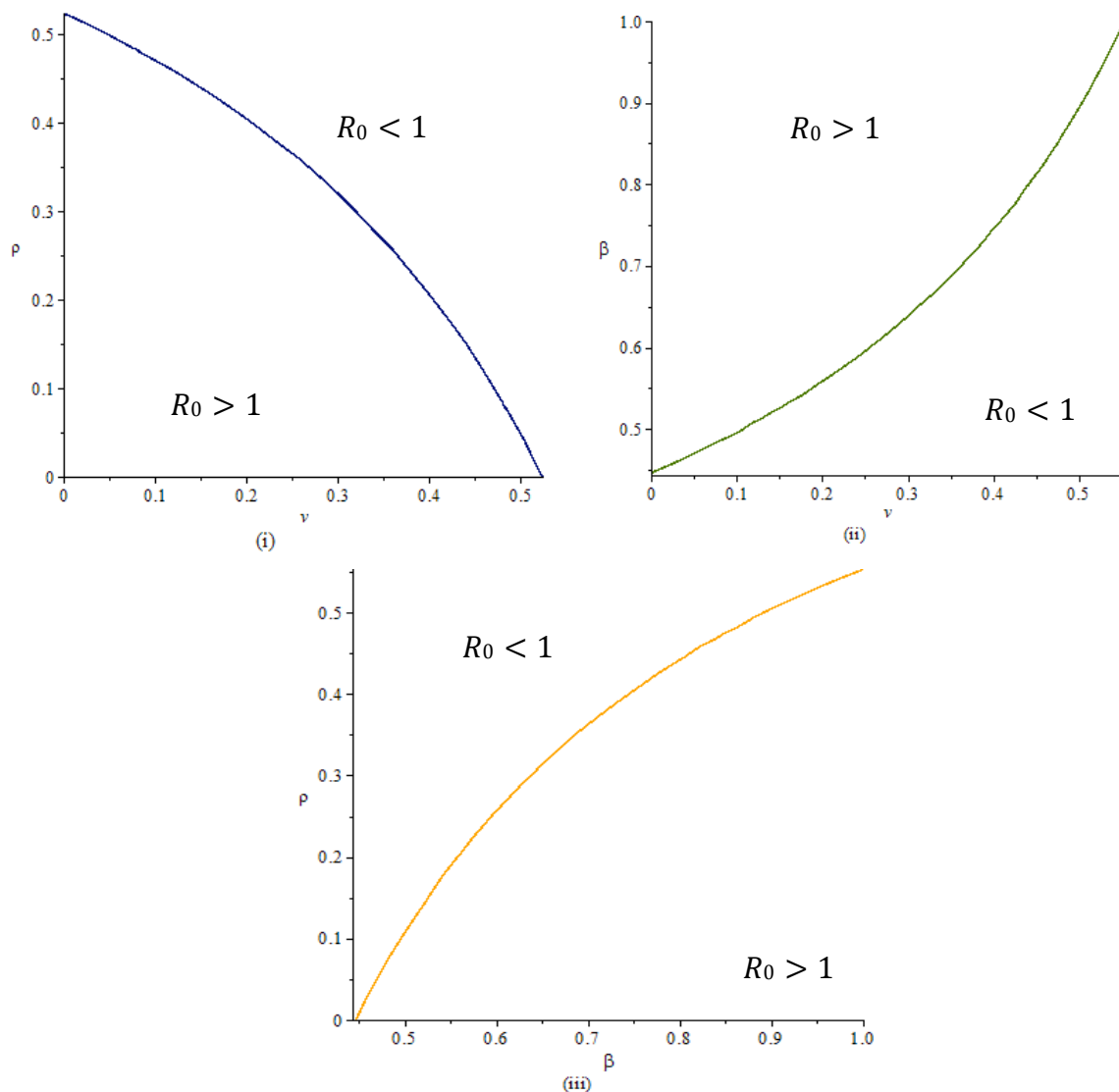
Tabel 6. Sensitivitas parameter β terhadap R_0

β	R_0	Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dan Kestabilannya	Titik Kesetimbangan Endemik dan Kestabilannya
0.75	1.343	$\lambda_6 = -0.9219$, $\lambda_7 = 0.1254$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil
0.65	1.163	$\lambda_6 = -0.9204$, $\lambda_7 = 0.06005$ dan E_0 tidak stabil	E_1 ada dan stabil
0.556	0.996	$\lambda_6 = -0.919$, $\lambda_7 = -0.00159$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada
0.35	0.626	$\lambda_6 = -0.9149$, $\lambda_7 = -0.1375$ dan E_0 stabil	E_1 tidak ada

Dari Tabel 6 diperoleh hasil bahwa ketika parameter interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi (β) diberi nilai 0.75, maknanya masyarakat masih melakukan interaksi seperti biasanya maka COVID-19 akan tetap ada di Indonesia. Hal ini dilihat dari nilai $R_0 > 1$ yaitu 1.343, maka titik kesetimbangan endemik stabil. Begitupula ketika nilai parameter β diturunkan menjadi 0.65. Namun, berbeda ketika nilai parameter β diturunkan lagi menjadi 0.556 atau masyarakat mengurangi kebiasaan interaksi menjadi sekitar 55% dari interaksi sebelumnya maka COVID-19 diharapkan akan hilang dari Indonesia. Hal ini terlihat dari nilai $R_0 < 1$ yaitu 0.996, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil, dan seterusnya. Semakin diperkecil nilai parameter β atau masyarakat mengurangi interaksi dengan individu lain

sehingga memperkecil kemungkinan terinfeksi COVID-19, maka $R_0 \ll 1$ atau dengan kata lain, semakin besar peluang COVID-19 diharapkan akan hilang dari Indonesia.

Selanjutnya, diperlihatkan grafik hubungan antara parameter v , ρ , dan β pada saat $R_0 = 1$. Pada bagian pertama yaitu grafik hubungan antara parameter v dan parameter ρ , selanjutnya antara parameter v dan parameter β , serta antara parameter ρ dan parameter β yang disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Hubungan antara parameter ketika $R_0 = 1$.

Pada Gambar 3 grafik linear pada setiap hubungan antara parameter adalah keadaan dimana $R_0 = 1$. Misalkan pada gambar (i) hubungan parameter v dan ρ , diambil nilai parameter $v = 0.2$ dan $\rho = 0.2$, selanjutnya ketika nilai parameter tersebut disubstitusi ke bilangan reproduksi dasar diperoleh $R_0 = 1.332$ atau $R_0 > 1$. Maka daerah di bawah grafik linear atau pada daerah sekitar koordinat $(v, \rho) = (0.2, 0.2)$ yaitu untuk keadaan $R_0 > 1$ dan di atas grafik linear yaitu untuk keadaan $R_0 < 1$. Begitupula cara pengujian untuk grafik hubungan antara parameter v dan β pada gambar (ii) serta hubungan antara parameter ρ dan β pada gambar (iii). Misalkan grafik parameter v dan ρ , diberikan nilai parameter ρ sebesar ρ^* maka agar daerah yang terjadi yaitu keadaan $R_0 < 1$ maka minimal pemberian nilai untuk parameter v adalah

sebesar v^* . Sama halnya dengan hubungan antara parameter v dan β , serta hubungan antara parameter ρ dan parameter β .

Berdasarkan hasil yang diperoleh diketahui bahwa sensitivitas dari parameter v dan ρ memiliki kecenderungan yang sama, yaitu solusi terbaik yang diharapkan dapat menekan perkembangan penyebaran COVID-19 yaitu dengan meningkatkan nilai proporsi tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa, dengan memperbanyak individu di Indonesia yang memperoleh vaksin dan memperbanyak kampanye di daerah Indonesia, kemungkinan COVID-19 akan hilang dari Indonesia. Namun berbeda dengan parameter β , solusi terbaik dalam menekan perkembangan penyebaran COVID-19 yaitu dengan mengurangi nilai parameter tersebut. Artinya, dengan mengurangi interaksi antar individu diharapkan dapat membuat COVID-19 hilang dari Indonesia.

D. Kesimpulan

Model matematika penyebaran COVID-19 pada penelitian ini merupakan pengembangan dari Model matematika dengan topik yang sama yaitu COVID-19 yang dilakukan oleh Bani, dkk. pada tahun 2021. Selanjutnya pada penelitian ini ditambahkan proporsi yang dianggap lebih berperan dibandingkan proporsi yang sebelumnya yaitu proporsi pemberian vaksin, pemberlakuan kampanye, dan prasarana. Selanjutnya ditambahkan pula dua populasi baru yaitu kelompok individu yang melakukan karantina di rumah sakit dan kelompok individu yang melakukan karantina mandiri. Berdasarkan hasil pengujian sensitivitas, diperoleh hasil bahwa parameter proporsi pemberian vaksin dan kampanye memiliki hubungan negatif dengan nilai bilangan reproduksi dasar atau maknanya nilai parameter tersebut harus ditingkatkan agar keadaan $R_0 < 1$ atau COVID-19 hilang dari Indonesia. Selanjutnya parameter interaksi memiliki hubungan positif dengan nilai bilangan reproduksi dasar, maknanya nilai parameter tersebut harus diturunkan agar keadaan $R_0 < 1$ atau COVID-19 hilang dari Indonesia.

Dari simulasi yang dilakukan diperoleh hasil bahwa solusi yang diharapkan dapat menekan semakin meluasnya penyebaran COVID-19 yaitu dengan memperbanyak individu yang menerima vaksin, selanjutnya pemberlakuan kampanye juga diperbanyak sebagai upaya masyarakat memahami penyebaran COVID-19 dan menerapkannya di kehidupan sehari-hari sehingga masyarakat dapat mengurangi interaksi atau kegiatan yang dapat membuatnya tertular COVID-19. Misalkan pada penelitian ini, minimal 41% individu di Indonesia menerima vaksin agar COVID-19 diharapkan dapat hilang dari Indonesia. Begitupun dengan pemberlakuan kampanye. Selain itu, semakin masyarakat mengurangi interaksi atau kegiatan yang dapat menyebabkan individu terinfeksi COVID-19, maka diharapkan semakin besar peluang COVID-19 hilang dari Indonesia.



DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, S., Owyed, S., Abdel-Aty, A. H., Mahmoud, E. E., Shah, K., & Alrabaiah, H. (2021). Mathematical analysis of COVID-19 via new mathematical model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 143, 110585.
- Ahmad, S., Ullah, A., Al-Mdallal, Q. M., Khan, H., Shah, K., & Khan, A. (2020). Fractional order mathematical modeling of COVID-19 transmission. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110256.
- Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
- Bahri, M. (2014). Stability analysis and optimal harvesting policy of prey-predator model with stage structure for predator. *Applied Mathematical Sciences*, 8(159), 7923-7934.
- Bani, A., & Toaha, S. (2021). Stability analysis of SCPUR mathematical model for the spread of COVID-19 (corona virus disease-19). *J. Math. Comput. Sci.*, 11(4), 4082-4103.
- Beay, L. K., Kasbawati, & Toaha, S. (2017, March). Effects of human and mosquito migrations on the dynamical behavior of the spread of malaria. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1825, No. 1, p. 020006). AIP Publishing LLC.
- Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M. (2008). Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of mathematical biology*, 70(5), 1272-1296.
- Das, A., Dhar, A., Goyal, S., Kundu, A., & Pandey, S. (2021). COVID-19: Analytic results for a modified SEIR model and comparison of different intervention strategies. *Chaos, Solitons & Fractals*, 144, 110595.
- Beta, M. A., Mokoginta, K., & Nadiyyah, A. (2022). Model Matematika SEIPRS Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pengaruh Vaksinasi dan Pengobatan. *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, 1(1), 27-38.
- Fauziah, I., & Manaqib, M. (2020). *Pemodelan matematika penyebaran penyakit Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus (MERS-CoV) dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi* (Bachelor's thesis, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta).
- Gugus Tugas COVID-19. (2022). *Peta Sebaran Perhari Penderita COVID-19*. <https://covid19.go.id/peta-sebaran>. Diakses 20 Januari 2022.
- Guo, Y. R., Cao, Q. D., Hong, Z. S., Tan, Y. Y., Chen, S. D., Jin, H. J., ... & Yan, Y. (2020). The origin, transmission and clinical therapies on coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak—an update on the status. *Military Medical Research*, 7(1), 1-10.
- Ivorra, B., Ferrández, M. R., Vela-Pérez, M., & Ramos, A. M. (2020). Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 88, 105303.
- Makmun, A., & Hazhiyah, S. F. (2020). Tinjauan Terkait Pengembangan Vaksin Covid 19. *Molucca Medica*, 52-59.
- Ndaïrou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 135, 109846.
- Puteri, K. E., Wiranti, K., Ziliwu, Y. S., Elvita, M., Frare, D. Y., Purdani, R. S., & Niman, S. (2021). Kecemasan Masyarakat akan Vaksinasi Covid-19. *Jurnal Keperawatan Jiwa (JKJ): Persatuan Perawat Nasional Indonesia*, 9(3), 539-548.



- Toaha, S., & Azis, M. I. (2018, March). Stability and optimal harvesting of modified Leslie-Gower predator-prey model. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 979, No. 1, p. 012069). IOP Publishing.
- Toaha, S., & Rustam. (2017, March). Optimal harvesting policy of predator-prey model with free fishing and reserve zones. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1825, No. 1, p. 020023). AIP Publishing LLC.
- Tuite, A. R., Fisman, D. N., & Greer, A. L. (2020). Mathematical modelling of COVID-19 transmission and mitigation strategies in the population of Ontario, Canada. *Cmaj*, 192(19), E497-E505.
- Van den Driessche, P. (2017). Reproduction numbers of infectious disease models. *Infectious Disease Modelling*, 2(3), 288-303.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2), 29-48.
- Willems, J. L. (1970). *Stability theory of dynamical systems* (Vol. 1). Wiley-Interscience.
- Wiraya, A. (2021). Stability Analysis of a Mathematical Model in Inflammatory Response System Due to SARS Coronavirus Infection. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 17(2), 280-292.
- World Health Organization (WHO). (2022). *Novel Coronavirus 2019*. <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>. Diakses pada 20 Januari 2022

