

ALJABAR MAX-PLUS: VERIFIKASI KEAMANAN SISTEM PENJADWALAN KEBERANGKATAN KERETA API

Aditya Putra Pratama¹, Nurul Fuady Adhalia H.²
Institut Teknologi Kalimantan¹
Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie²
Email: adityapp@lecturer.itk.ac.id¹, nurulfuady@ith.ac.id²

Abstrak. Dalam penelitian ini dibahas mengenai cara untuk melakukan verifikasi terhadap sistem penjadwalan keberangkatan kereta api atas Aljabar Max-Plus berdasarkan suatu *property* keamanan yang akan diamati. Lebih khusus, sistem yang digunakan sebagai representasi dari sistem penjadwalan keberangkatan kereta api, yaitu: Sistem uncertain Max-Plus Linear (uMPL). Sistem uMPL tersebut dapat dikonstruksi berdasarkan graf berarah yang merepresentasikan jalur lintasan kereta api. Jika diberikan suatu Sistem uMPL autonomous yang merepresentasikan sistem penjadwalan keberangkatan kereta api, maka proses untuk melakukan verifikasi keamanan terhadap sistem tersebut berdasarkan *property* yang diberikan dapat dilakukan dengan menggunakan analisis *reachability*. Lebih lanjut, jika diberikan Sistem uMPL, suatu *initial conditions* yang tak kosong, *time horizon*, dan *unsafe set*, maka verifikasi keamanan terhadap Sistem uMPL dapat dilakukan dengan melihat apakah *state* dari sistem tersebut mampu mencapai *unsafe set* atau tidak. Jika *state* dari Sistem uMPL mampu mencapai *unsafe set* berdasarkan *time horizon* yang diberikan, maka Sistem uMPL tersebut tidak aman. Sebaliknya, jika *state* sistem tidak mampu mencapai *unsafe set* berdasarkan *time horizon* yang diberikan, maka sistem tersebut dikatakan aman.

Kata Kunci: Aljabar max-plus, analisis *reachability*, sistem transisi, sistem *uncertain max-plus linear*, verifikasi keamanan.

Abstract. This research discusses how to verify the train departure scheduling systems on the Max-Plus Algebra based on a safety property to be observed. More specifically, the system used as a representation of the train departure scheduling system, namely: Uncertain Max-Plus Linear (uMPL) system. The uMPL system can be constructed based on a directed graph that represents the railroad tracks. Given an autonomous uMPL system that represents a train departure scheduling system, then the process of verifying the security of the system based on the given properties can be carried out using reachability analysis. Furthermore, if given the uMPL system, a non-empty initial condition, time horizon, and unsafe set, security verification of the uMPL system can be carried out by seeing whether the state of the system is able to reach the unsafe set or not. If the state of the uMPL system is able to reach an unsafe set based on the given time horizon, then the uMPL system is not safe. Conversely, if the system state is unable to reach the unsafe set based on the given time horizon, then the system is said to be safe.

Keywords: Max-plus algebra, reachability analysis, transition systems, uncertain max-plus linear, safety verification.

A. Pendahuluan

Sistem Max-Plus Linear (MPL) merupakan salah satu bagian dari sistem kejadian diskrit yang merepresentasikan permasalahan sinkronisasi dan waktu *delay*. Proses sinkronisasi di Sistem MPL ditandai dengan adanya maksimalisasi diantara beberapa kejadian. Struktur aljabar dari Sistem MPL adalah Aljabar Max-Plus. Aljabar Max-Plus adalah semiring idempoten dengan dua operasi biner penjumlahan (\oplus) dan perkalian (\otimes) yang didefinisikan sebagai maksimum dan jumlah. Sistem MPL juga merupakan sistem deterministik karena entri matriks yang ada pada sistem tersebut diasumsikan tetap. Jika entri dari matriks tersebut tidak tetap dan nilainya diasumsikan berada pada suatu interval, sistem



tersebut disebut Sistem uncertain MPL (uMPL). Kondisi ini konsisten dengan asumsi model bahwa entri matriks dari Sistem uMPL memperhatikan adanya *noise* dan juga gangguan.

Analisis keamanan suatu sistem merupakan salah satu aspek yang sangat penting untuk proses evaluasi dari sistem tersebut. Hal ini digunakan untuk menjamin bahwa sistem dalam kondisi aman. Secara formal, jika diberikan suatu Sistem uMPL, himpunan *initial conditions* yang tidak kosong, *time horizon*, dan *unsafe set*, maka akan diselidiki apakah *state* dari sistem dapat mencapai *unsafe set* dalam *time horizon* yang diberikan. Jika *unsafe set* dapat dicapai oleh *state* dari sistem, maka sistem tidak aman. Jika tidak, sistem aman. Salah satu metode yang digunakan untuk menganalisis keamanan suatu sistem adalah dengan menggunakan analisis *reachability*. Dalam metode tersebut, dapat menggunakan pendekatan *forward reachability* atau *backward reachability*. Analisis *reachability* pada sistem uMPL telah dibahas oleh (Candido, R. M. F., dkk., 2017).

Dalam penelitian ini, akan dilakukan proses verifikasi keamanan dari sistem penjadwalan kereta api dengan menggunakan pendekatan *forward reachability*. Verifikasi keamanan dari Sistem uMPL secara umum dengan menggunakan pendekatan *forward reachability* telah dibahas oleh (A.P. Pratama dkk, 2018). Lebih lanjut, di bagian B diuraikan mengenai dasar teori yang digunakan dalam penelitian ini, yang meliputi: konsep DBM, Aljabar Max-Plus, Sistem uMPL, representasi *piecewise affine*, analisis *reachability*, dan verifikasi keamanan dari Sistem uMPL. Di bagian C dibahas mengenai prosedur untuk melakukan verifikasi keamanan dari sistem penjadwalan kereta api dengan menggunakan pendekatan *reachability*. Terakhir, di bagian D disimpulkan mengenai hasil yang telah diperoleh di bagian C mengenai tingkat keamanan dari sistem penjadwalan kereta api berdasarkan *initial conditions*, *time horizon*, dan *unsafe set* yang diberikan.

B. Dasar Teori

Dasar teori yang digunakan sebagai konsep dasar dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. *Difference-Bound Matrices* (DBM)

Difference-Bound Matrices (DBM) dibentuk dari selisih diantara dua variabel. Secara formal, pengertian dari DBM dituliskan dalam definisi berikut:

Definisi 2.1: DBM adalah suatu matriks persegi yang merepresentasikan irisan dari berhingga himpunan di \mathbb{R}^n yang didefinisikan sebagai $x_j - x_i \blacktriangleleft_{i,j} a_{i,j}$, dengan $\blacktriangleleft_{i,j} \in \{\leq, <\}$ yang menyatakan tanda pertidaksamaan, bilangan spesifik $a_{i,j} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ menyatakan batas atas, untuk $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan nilai dari variabel x_0 selalu bernilai 0. Himpunan ini merupakan himpunan bagian dari \mathbb{R}^n yang dibentuk oleh nilai dari variabel - variabel x_1, x_2, \dots, x_n .

□

DBM dapat direpresentasikan sebagai matriks, dimana entri dari matriks tersebut adalah pasangan terurut dari batas atas pertidaksamaan dengan tanda pertidaksamaannya. Dalam penulisan DBM, digunakan aturan kolom-baris, yaitu elemen matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j bersesuaian dengan $x_{j-1} - x_{i-1}$. Elemen matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j dinotasikan dengan $(a_{i,j}, \blacktriangleleft_{i,j})$, yang artinya $x_{j-1} - x_{i-1} \blacktriangleleft_{i,j} a_{i,j}$. Sebagai contoh, jika diberikan DBM $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, maka representasi dari DBM tersebut dalam bentuk matriks adalah

$$D = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) \\ (1, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$



Ada beberapa operasi yang didefinisikan pada DBM, seperti irisan, komplemen, bentuk kanonik, proyeksi ortogonal, *image* yang bersesuaian dengan *affine dynamic* dan juga *inverse image* yang bersesuaian dengan *affine dynamic* dapat dilihat dalam (Adzkiya, dkk., 2015).

2. Aljabar Max-Plus

Aljabar Max-Plus adalah suatu semiring idempotent dengan dua operasi biner, yaitu: maksimum dan penjumlahan. Misalkan $\mathbb{R}_\varepsilon := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ adalah suatu himpunan dan dilengkapi oleh dua operasi biner: penjumlahan (\oplus) dan perkalian (\otimes) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= \max\{a, b\}, \\ a \otimes b &:= a + b, \end{aligned}$$

untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Perlu diperhatikan elemen nol terhadap operasi biner " \oplus " adalah $\varepsilon := -\infty$ dan elemen satuannya terhadap operasi biner " \otimes " adalah 0. Lebih lanjut, operasi " \oplus " dan " \otimes " pada matriks didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{i,j} &= [A]_{i,j} \oplus [B]_{i,j}, \\ [A]_{i,j} &= a \otimes [A]_{i,j}, \\ [C \otimes D]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^r \{[C]_{i,k} \otimes [D]_{k,j}\}, \end{aligned}$$

untuk sebarang matriks $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times r}$, dan $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{r \times n}$. Jika diperhatikan, aturan operasi yang terdefinisi diatas memiliki analogi yang identik dengan aturan operasi yang ada pada aljabar konvensional. Kemudian, notasi $[A]_{i,j}$ dimaksudkan untuk menjelaskan entri dari matriks A pada baris ke- i dan kolom ke- j .

3. Sistem uncertain Max-Plus Linear (uMPL)

Sistem uncertain Max-Plus Linear (uMPL) adalah perluasan dari Sistem Max-Plus Linear (MPL) dengan matriks A yang ada pada sistem tersebut adalah non-deterministik dan entri-entrinya memiliki nilai yang berada pada suatu rentang interval. Sistem uMPL sendiri telah diteliti oleh (Necoara, dkk., 2006)(Van Den Boom dan De Schutter, 2011)(Candido, R. M. F., dkk., 2017). Terlebih dahulu, diberikan Sistem MPL sebagai berikut:

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes x(k-1) \tag{2.1}$$

$$y(k) = C \otimes x(k-1).$$

Variabel k merepresentasikan indeks waktu ke- k suatu kejadian. *State* $x(k)$ merupakan kejadian yang terjadi pada waktu ke- k , $u(k-1)$ merupakan kejadian input yang terjadi pada waktu ke- k , dan $x(k)$ adalah suatu kejadian output yang terjadi pada waktu ke- k . Sistem MPL (2.1) merupakan suatu sistem yang non-autonomous, karena sistem tersebut membutuhkan suatu input agar sistemnya bisa berjalan. Sistem MPL non-autonomous tersebut bisa ditransformasikan ke dalam bentuk sistem MPL autonomous berikut:

$$x(k) = A \otimes x(k-1), \tag{2.2}$$

dengan $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ dan setiap elemen dari A merepresentasikan *delay* minimum dari dua kejadian. Setiap elemen dari matriks A itu nilainya konstan, sehingga Sistem MPL (2.2) disebut sistem yang deterministik. Jika dalam pembentukan model juga diperhatikan adanya gangguan, maka setiap entri dari matriks A saat waktu ke- k selalu berubah dan perubahan dari nilainya diasumsikan berada pada suatu rentang interval. Sehingga, Sistem MPL (2.2) tidak lagi menjadi sistem yang deterministik dan dikatakan sebagai Sistem uMPL. Bentuk dari Sistem uMPL autonomous didefinisikan oleh:

$$x(k) = A(k) \otimes x(k-1), \tag{2.3}$$



dengan $A(k) \in A$. Notasi $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ adalah matriks interval yang mana berlaku $\underline{A} \leq \overline{A}$ dengan $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$.

4. Representasi *Piecewise Affine*

Sistem MPL (2.2) dapat dinyatakan sebagai Sistem *Piecewise Affine* (PWA) (Heemels, W. P., dkk, 2001). Sistem PWA dibentuk oleh koleksi dari region-region beserta dinamika dari masing-masing regionnya yang *affine*, yaitu linear yang ditambah dengan suatu konstanta. Setiap region dibentuk oleh koefisien $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \{1, 2, \dots, n\}^n$, dimana n adalah dimensi dari Sistem MPL (Adzkiya. dkk., 2015). Region yang bersesuaian dengan koefisien g adalah

$$R_g = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=1, j \neq g_i}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_j - x_{g_i} \leq [A]_{i, g_i} - [A]_{i, j}\},$$

dan dinamika yang bersesuaian dengan region tersebut adalah

$$x_i(k+1) = x_{g_i}(k) + [A]_{i, g_i}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalam penelitian (Candido, R. M. F., dkk., 2017), Sistem uMPL (2.3) dapat dipartisi menggunakan matriks batas atas \overline{A} . Dalam hal ini, setiap region dibentuk oleh koefisien $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \{1, 2, \dots, n\}^n$. Lebih lanjut, region yang bersesuaian dengan koefisien g adalah

$$R_g^u = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=1, j \neq g_i}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_j - x_{g_i} \leq [\overline{A}]_{i, g_i} - [\overline{A}]_{i, j}\}. \quad (2.4)$$

dan dinamika yang bersesuaian dengan region tersebut adalah

$$\bigcap_{i=1}^n \{x_i(k) - x_{g_i}(k-1) \leq [\overline{A}]_{i, g_i}\} \cap \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^n \{x_j(k-1) - x_{g_i}(k) \leq -[\underline{A}]_{i, j}\}. \quad (2.5)$$

Perhatikan bahwa dinamika tersebut dapat direpresentasikan sebagai suatu DBM atas variabel-variabel *state* saat waktu ke- k dan $k-1$.

5. *Reachability* dari Sistem uMPL

Analisis *reachability* dari Sistem uMPL telah dibahas dalam penelitian (Candido, R. M. F., dkk., 2017). Dalam analisis *reachability*, terdapat dua pendekatan yang bisa digunakan, yaitu *forward reachability* dan *backward reachability*.

Jika diberikan suatu Sistem uMPL dan suatu himpunan tak kosong *initial conditions* X_0 , maka himpunan *state* yang dapat dicapai saat ke- k dapat dihitung secara rekursif melalui formula berikut ini:

$$X_k = \{A_k \otimes x : A_k \in [\underline{A}, \overline{A}], x \in X_{k-1}\}.$$

Formula diatas juga bisa dikatakan sebagai permasalahan pencarian *image* dari *state* yang dapat dicapai saat ke- k . Prosedur yang bisa digunakan untuk menghitung *image* dengan menggunakan pendekatan DBM adalah sebagai berikut. Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah suatu DBM dan $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ adalah suatu matriks interval, prosedur untuk melakukan perhitungan *image* dari X yang bersesuaian dengan A adalah:

1. Konstruksi dinamika partisi dari Sistem uMPL (2.3) menggunakan matriks batas atas \overline{A} ;
2. Hitung *cross product* dari $\mathbb{R}^n \times X$;



3. Untuk suatu g sedemikian sehingga $X \cap R_g^u$ tak kosong, hitung terlebih dahulu $(X \cap R_g^u) \times \mathbb{R}^n$, lalu cari irisan antara $(X \cap R_g^u) \times \mathbb{R}^n$ dengan dinamika partisi yang bersesuaian, dan terakhir proyeksikan hasil irisan tersebut terhadap variabel-variabel *state* yang bersesuaian pada langkah selanjutnya.

Jika diberikan suatu Sistem uMPL dan suatu himpunan tak kosong *final conditions* X_0 , maka himpunan *state* yang dapat dicapai saat ke- k dapat dihitung secara rekursif melalui formula berikut ini:

$$X_{-k} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists A_k \in [\underline{A}, \overline{A}] \Rightarrow A_k \otimes x \in X_{-k+1}\}.$$

Formula diatas juga dikatakan sebagai permasalahan pencarian *invers image* dari *state* yang dapat dicapai saat ke- k . Prosedur yang bisa digunakan untuk menghitung *invers image* dengan menggunakan pendekatan DBM adalah sebagai berikut. Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah suatu DBM dan $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ adalah suatu matriks interval, prosedur untuk melakukan perhitungan *invers image* dari X yang bersesuaian dengan A adalah:

1. Konstruksi dinamika partisi dari Sistem uMPL (2.3) menggunakan matriks batas atas \overline{A} ;
2. Hitung *cross product* dari $\mathbb{R}^n \times X$;
3. Untuk suatu g sedemikian sehingga irisan dari suatu dinamika partisi dengan $\mathbb{R}^n \times X$ tak kosong, hitung terlebih dahulu irisan tersebut dan proyeksikan hasil irisan tersebut terhadap variabel-variabel *state* yang bersesuaian pada langkah sebelumnya.

6. Verifikasi Keamanan dari Sistem uMPL

Dalam melakukan verifikasi keamanan terhadap Sistem uMPL (2.3), dapat menggunakan pendekatan analisis *forward reachability* ataupun *backward reachability*. Pada penelitian (A.P. Pratama dkk, 2018), telah dibahas mengenai prosedur untuk melakukan verifikasi keamanan dari Sistem uMPL menggunakan pendekatan *forward reachability*.

Jika menggunakan pendekatan *forward reachability*, prosedur yang dapat dilakukan sebagai berikut. Diberikan Sistem uMPL, himpunan tak kosong *initial conditions* X_0 , *time horizon* N , dan *unsafe set* U_s . Selanjutnya, perhatikan langkah-langkah berikut ini:

1. Hitung *state* yang bisa dicapai saat ke- $1, 2, \dots, N$, yang dinotasikan dengan X_1, X_2, \dots, X_N ;
2. Bandingkan setiap *state* yang diperoleh dengan *unsafe set* U_s . Jika ada k dengan $0 \leq k \leq N$ sehingga $X_k \cap U_s \neq \emptyset$, maka Sistem uMPL tidak aman. Selain itu, Sistem uMPL dikatakan aman.

Jika menggunakan pendekatan *backward reachability*, prosedur yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut. Diberikan Sistem uMPL, himpunan tak kosong *initial conditions* X_0 , *time horizon* N , dan *unsafe set* U_s . Selanjutnya, perhatikan langkah-langkah berikut ini:

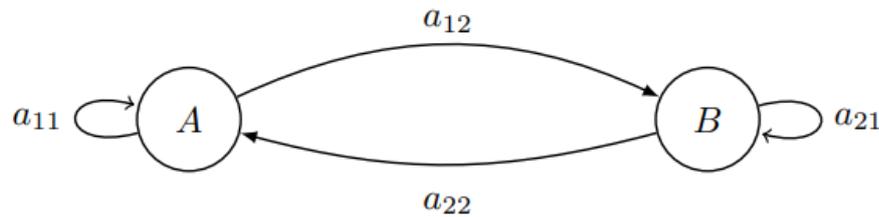
1. Definisikan *unsafe set* U_s sebagai *final conditions* \mathcal{F}_0 ;
2. Hitung $\mathcal{F}_{-1}, \mathcal{F}_{-2}, \dots, \mathcal{F}_{-N}$;
3. Bandingkan setiap *state* yang diperoleh dengan *initial conditions* X_0 . Jika ada k dengan $-N \leq k \leq 0$ sehingga $\mathcal{F}_k \cap X_0 \neq \emptyset$, maka Sistem uMPL tidak aman. Selain itu, Sistem uMPL dikatakan aman.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini, diuraikan secara bertahap mengenai cara untuk melakukan verifikasi keamanan pada sistem penjadwalan keberangkatan kereta api dengan menggunakan pendekatan *forward reachability*. Dibawah ini diberikan suatu contoh sederhana mengenai



suatu jalur lintasan kereta api 2 wilayah, yang nantinya bisa digunakan untuk kasus jalur lintasan kereta api yang lebih kompleks. Diberikan suatu jalur lintasan kereta api sederhana sebagaimana berikut.



Gambar 1. Jalur lintasan kereta api di 2 wilayah

Berdasarkan model jaringan sistem keberangkatan kereta api diatas, apabila lama perjalanan $a_{11} = 1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$, dan a_{12} yang nilainya antara 4 sampai dengan 6, sehingga Sistem uMPL yang bersesuaian dengan kasus jaringan sistem keberangkatan kereta api diatas adalah sebagai berikut:

$$x(k) = A(k) \otimes x(k - 1) \quad (3.1)$$

dengan $x(k) = (x_1(k), x_2(k))'$ dan juga

$$A(k) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & [4,6] \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk melakukan verifikasi keamanan dari Sistem uMPL (3.1) dengan *initial conditions* $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, *time horizon* $N = 2$, dan *unsafe set* $U_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}$ adalah sebagai berikut.

1. Hitung X_k , dengan $k = 1, 2, \dots, N$
 - a. Untuk $k = 1$, hitunglah D_g dan $D^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$;
 - b. Hitung $D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$;
 - c. Hitung bentuk kanonik dari hasil b.;
 - d. Hitung proyeksi dari hasil c. terhadap variabel-variabel $\{x'_1, x'_2\}$;
 - e. Ulangi proses a. sampai dengan proses d. untuk $k = 2, 3, \dots, N$.
2. Untuk $\forall i$, hitung $X_i \cap U_s$,
 - a. Jika $\exists i$ sedemikian sehingga $X_i \cap U_s \neq \emptyset$, maka sistem uMPL tersebut tidak aman berdasarkan *time horizon* dan *initial conditions* yang diberikan;
 - b. Jika $\forall i$ sedemikian sehingga $X_i \cap U_s = \emptyset$, maka sistem uMPL tersebut dikatakan aman berdasarkan *time horizon* dan *initial conditions* yang diberikan.

Berikut penjelasan dari masing-masing proses diatas secara rinci, bisa diperhatikan uraian berikut ini.

1. Hitung X_k , dengan $k = 1, 2, \dots, N$.

Sebelumnya, akan dicari dinamika partisi dan region yang bersesuaian dengan dinamika partisi tersebut dengan menggunakan persamaan (2.4) dan (2.5), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x(k) = \begin{cases} \left[\begin{array}{l} [(1 \otimes x_1(k-1)) \oplus (4 \otimes x_2(k-1)), 1 \otimes x_1(k-1)] \\ [(3 \otimes x_1(k-1)) \oplus (2 \otimes x_2(k-1)), 3 \otimes x_1(k-1)] \end{array} \right], x(k-1) \in R_{(1,1)}^u; \\ \left[\begin{array}{l} [(1 \otimes x_1(k-1)) \oplus (4 \otimes x_2(k-1)), 6 \otimes x_2(k-1)] \\ [(3 \otimes x_1(k-1)) \oplus (2 \otimes x_2(k-1)), 3 \otimes x_1(k-1)] \end{array} \right], x(k-1) \in R_{(2,1)}^u; \\ \left[\begin{array}{l} [(1 \otimes x_1(k-1)) \oplus (4 \otimes x_2(k-1)), 6 \otimes x_2(k-1)] \\ [(3 \otimes x_1(k-1)) \oplus (2 \otimes x_2(k-1)), 2 \otimes x_2(k-1)] \end{array} \right], x(k-1) \in R_{(2,2)}^u; \end{cases}$$

dengan:

$$\begin{aligned} R_{(1,1)}^u &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \geq 5\}, \\ R_{(2,1)}^u &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 - x_2 \leq 5\}, \\ R_{(2,2)}^u &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq -1\}. \end{aligned}$$

a. Untuk $k = 1$, hitunglah D_g dan $D^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$

Karena $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, sehingga DBM $X_0 \times \mathbb{R}^2 = \{(x_0, x_1, x_2, x'_1, x'_2)' \in \mathbb{R}^5 : 1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$ adalah sebagai berikut:

$$D^{X_0 \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk menghitung DBM $D_{(1,1)}$, $D_{(2,1)}$, dan $D_{(2,2)}$ adalah sebagai berikut:

Untuk region $R_{(1,1)}^u$ dan dinamika partisi yang bersesuaian dengan region tersebut dihimpun kedalam himpunan berikut:

$$\{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x'_1 \leq -1, x_2 - x'_1 \leq -4, x'_1 - x_1 \leq 1, x_1 - x'_2 \leq -3, x_2 - x'_2 \leq -2, x'_2 - x_1 \leq 3, x_2 - x_1 \leq -5\}.$$

Untuk mendapatkan himpunan diatas, secara rinci dijelaskan dalam penelitian (A.P. Pratama dkk, 2018).

DBM dari himpunan diatas adalah sebagai berikut:

$$D_{(1,1)} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (-5, \leq) & (1, \leq) & (3, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$

Dengan cara sama, dapat dihitung DBM dari $R_{(2,1)}^u$ dan $R_{(2,2)}^u$ beserta dinamika partisi yang bersesuaian dengan region-regionya, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$D_{(2,1)} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (1, \leq) & (+\infty, \leq) & (3, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (5, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$



$$D_{(2,2)} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (2, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}$$

b. Hitung $D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$

Untuk menghitung $D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$ menggunakan formula $D_g \cap D^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$ dan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$D_{(1,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (-5, \leq) & (1, \leq) & (5, \leq) \\ (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D_{(2,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (1, \leq) & (+\infty, \leq) & (3, \leq) \\ (0, \leq) & (5, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D_{(2,2)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (0, \leq) & (-1, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (2, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$

c. Bentuk kanonik dari DBM $D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$

Dengan menggunakan Algoritma Floyd–Warshall, diperoleh bentuk kanonik dari $D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2}$ sebagai berikut:

$$cf(D_{(1,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (10, \leq) \\ (-5, \leq) & (0, \leq) & (-5, \leq) & (1, \leq) & (5, \leq) \\ (0, \leq) & (5, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (10, \leq) \\ (-6, \leq) & (-1, \leq) & (-6, \leq) & (0, \leq) & (4, \leq) \\ (-8, \leq) & (-3, \leq) & (-8, \leq) & (-2, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$cf(D_{(2,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (5, \leq) & (2, \leq) & (8, \leq) & (8, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (1, \leq) & (7, \leq) & (3, \leq) \\ (0, \leq) & (5, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (8, \leq) \\ (-4, \leq) & (-1, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (2, \leq) \\ (-4, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$cf(D_{(2,2)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (1, \leq) & (2, \leq) & (8, \leq) & (4, \leq) \\ (-1, \leq) & (0, \leq) & (1, \leq) & (7, \leq) & (3, \leq) \\ (-2, \leq) & (-1, \leq) & (0, \leq) & (6, \leq) & (2, \leq) \\ (-6, \leq) & (-5, \leq) & (-4, \leq) & (0, \leq) & (-2, \leq) \\ (-4, \leq) & (-3, \leq) & (-2, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$



d. Hitung proyeksi cf $(D_g^{X_0 \times \mathbb{R}^2})$ terhadap variabel $\{x'_1, x'_2\}$

Proyeksi dari DBM $cf(D_{(1,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2})$, $cf(D_{(2,1)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2})$, dan $cf(D_{(2,2)}^{X_0 \times \mathbb{R}^2})$ terhadap variabel $\{x'_1, x'_2\}$ adalah sebagai berikut:

$$D^{X_1^{(1,1)}} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (6, \leq) & (10, \leq) \\ (-6, \leq) & (0, \leq) & (4, \leq) \\ (-8, \leq) & (-2, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D^{X_1^{(2,1)}} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (8, \leq) & (8, \leq) \\ (-4, \leq) & (0, \leq) & (2, \leq) \\ (-4, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D^{X_1^{(2,2)}} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (8, \leq) & (4, \leq) \\ (-6, \leq) & (0, \leq) & (-2, \leq) \\ (-4, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$

Dan diperoleh:

$$X_1^{(1,1)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 6, 8 \leq x_2 \leq 10, -4 \leq x_1 - x_2 \leq -2\};$$

$$X_1^{(2,1)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x_1 \leq 8, 4 \leq x_2 \leq 8, -2 \leq x_1 - x_2 \leq 4\};$$

$$X_1^{(2,2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq x_1 \leq 8, x_2 = 4, 2 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}.$$

e. Ulangi proses a. sampai dengan proses d. untuk $k = 2$

Karena:

$$D^{X_1^{(1,1)} \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (6, \leq) & (10, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-6, \leq) & (0, \leq) & (4, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-8, \leq) & (-2, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D^{X_1^{(2,1)} \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (8, \leq) & (8, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-4, \leq) & (0, \leq) & (2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-4, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix},$$

$$D^{X_1^{(2,2)} \times \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} (0, \leq) & (8, \leq) & (4, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-6, \leq) & (0, \leq) & (-2, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (-4, \leq) & (4, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) & (+\infty, \leq) \\ (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (+\infty, \leq) & (0, \leq) \end{bmatrix}.$$

Dengan mengikuti proses sebagaimana yang telah diuraikan pada proses a. sampai dengan proses d., diperoleh *image* dari $X_1^{(1,1)}$, $X_1^{(2,1)}$, dan $X_1^{(2,2)}$ masing-masing sebagai berikut:

- i. *Image* dari $X_1^{(1,1)}$

$$X_2^{(1,1)} = \emptyset,$$

$$X_2^{(2,1)} = \emptyset,$$

$$X_2^{(2,2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 12 \leq x_1 \leq 16, 10 \leq x_2 \leq 12, 2 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}.$$
- ii. *Image* dari $X_1^{(2,1)}$



$$\begin{aligned}
 X_2^{(1,1)} &= \emptyset, \\
 X_2^{(2,1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x_1 \leq 14, 7 \leq x_2 \leq 11, -2 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}, \\
 X_2^{(2,2)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x_1 \leq 14, 7 \leq x_2 \leq 10, 2 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}.
 \end{aligned}$$

iii. *Image* dari $X_1^{(2,2)}$

$$\begin{aligned}
 X_2^{(1,1)} &= \emptyset, \\
 X_2^{(2,1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x_1 \leq 10, 9 \leq x_2 \leq 11, -2 \leq x_1 - x_2 \leq 1\}, \\
 X_2^{(2,2)} &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

2. Untuk $\forall i$, hitung $X_i^g \cap U_s$

Karena untuk beberapa i dan g berlaku $X_i^g \cap U_s \neq \emptyset$, sehingga dapat dikatakan bahwa sistem uMPL (3.1) tidak aman berdasarkan *initial conditions* $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, *time horizon* $N = 2$, dan *unsafe set* $U_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1 - x_2 \leq 4\}$ yang diberikan.

Pada kasus sistem penjadwalan keberangkatan kereta api dengan jalur yang lebih kompleks, katakan untuk n wilayah, sehingga Sistem uMPL yang bersesuaian dengan permasalahan penjadwalan tersebut berdimensi n . Oleh karena itu, proses verifikasi keamanan dari sistem tersebut sebaiknya dikerjakan dengan menggunakan bantuan *software*, dikarenakan kompleksitas dari perhitungannya yang semakin tinggi. Prosedur yang bisa diimplementasikan untuk melakukan proses verifikasi keamanan terhadap sistem tersebut itu mirip dengan langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya.

D. Kesimpulan

Proses analisis keamanan dari sistem penjadwalan kereta api atas Aljabar Max-Plus dapat menggunakan pendekatan *forward reachability* ataupun *backward reachability*. Dalam hal ini, diselidiki apakah sistem uMPL yang terbentuk bisa mencapai *unsafe set* yang diberikan ataukah tidak, berdasarkan *time horizon* yang diberikan. Jika sistem mampu mencapai *unsafe set* berdasarkan *time horizon* yang diberikan, maka sistem tersebut tidak aman. Sebaliknya, jika *unsafe set* tidak mampu dicapai oleh sistem uMPL berdasarkan *time horizon* yang diberikan, maka sistem tersebut aman. Dalam contoh kasus yang diberikan di penelitian ini, sistem uMPL tidak aman dengan kondisi *initial conditions*, *time horizon*, dan juga *unsafe set* yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

- Adzkiya, D., Zhang, Y. dan Abate, A.: VeriSiMPL 2: An Open-Source Software for the Verification of Max-Plus-Linear Systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 2015, manuscript.
- Candido, R. M. F., Hardouin, L., Lhommeau, M. dan Mendes, R. S. 2017. Conditional Reachability Of Uncertain Max Plus Linear Systems.
- Heemels, W.P., De Schutter, B. and Bemporad, A., 2001. Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37(7), pp.1085-1091.



- Necoara, I., Kerrigan, E.C., De Schutter, B., and Van den Boom, T.J.J., 2006. Worst-case optimal control of uncertain max-plus-linear systems. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California, pp. 6055-6060, Dec. 2006
- Pratama, A.P., Subchan, S. and Adzkiya, D., 2018. Safety Verification of Uncertain Max-Plus-Linear Systems. (IJCSAM) International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, 4(2), pp.52-55.
- Van den Boom, T., dan De Schutter, B., A stabilizing model predictive controller for uncertain max-plus-linear systems and uncertain switching max-plus linear systems, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, pp. 8663-8668, 2011. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00872

